FoSa AT1

für die GNM

Manuel Kühner (161992)

27. Juni 2007

Inhaltsverzeichnis

1 Grundgleichungen

1. Maschengleichung des Ankerkreises

$$u = i \cdot R_\text{a} + \frac{di}{dt} \cdot L_\text{a} + u_\text{ind} \tag{1}$$

2. Erste Fundamentalgleichung der Gleichstrommaschine

$$u_\text{ind} = c \cdot \omega \tag{2}$$

3. Zweite Fundamentalgleichung der Gleichstrommaschine

$$M_\text{i} = c \cdot i \tag{3}$$

4. Drallsatz ($M = M_\text{i} - M_\text{R}$, häufig wird $M_\text{R} = 0$ angenommen)

$$J \cdot \dot{\omega} = M - M_\text{L} \tag{4}$$

2 Strukturbild

Aus den Grundgleichungen ergeben sich folgende zwei gekoppelte DGLs:

$$u = i \cdot R_\text{a} + \frac{di}{dt} \cdot L_\text{a} + c \cdot \omega \tag{5}$$

$$J \cdot \dot{\omega} = c \cdot i - M_\text{L} \tag{6}$$

1. Alle DGLs nach der höchsten Ableitung auflösen.
2. Annahme die höchsten Ableitungen seien bekannt und zugänglich.
3. Die höchste Ableitung so oft integrierten, bis keine abgeleitete Größe (Ausgangsgröße) am letzten Integrierer auftreten.
4. Die rechte Seeite der aufgelösten DGL als Berechnungsvorschrift für die angenommene höchste Ableitung auffassen.

3 Übetrragungsfunktionen

3.1 Führungs-Übertragungsfunktion

Die Laplace-Transformierten der zwei gekoppelten DGLs sind:

$$u(s) = (R_\mathrm{a} + L_\mathrm{a} \cdot s) \cdot i(s) + c \cdot \omega(s) \tag{7}$$
$$J \cdot s \cdot \omega(s) = c \cdot i(s) - M_\mathrm{L}(s) \tag{8}$$

Damit ergibt sich die Führungsübertragungsfunktion zu:

$$G_{\omega,u}|_{M_\mathrm{L}=0} = \frac{\omega(s)}{u(s)} = \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{\frac{JL_\mathrm{a}}{c^2} \cdot s^2 + \frac{JR_\mathrm{a}}{c^2} \cdot s + 1} \tag{9}$$

Nach Einführung der beiden Zeitkonstanten $T_\mathrm{m} = \frac{JR_\mathrm{a}}{c^2}$ und $T_\mathrm{e} = \frac{L_\mathrm{a}}{R_\mathrm{a}}$ ergibt sich:

$$G_{\omega,u}|_{M_\mathrm{L}=0} = \frac{\omega(s)}{u(s)} = \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{T_\mathrm{e}T_\mathrm{m} \cdot s^2 + T_\mathrm{m} \cdot s + 1} \tag{10}$$

Für $T_\mathrm{m} >> T_\mathrm{e}$ gilt:

$$G_{\omega,u}|_{M_\mathrm{L}=0} = \frac{\omega(s)}{u(s)} = \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{T_\mathrm{e}T_\mathrm{m} \cdot s^2 + T_\mathrm{m} \cdot s + 1} \tag{11}$$
$$= \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{T_\mathrm{e}T_\mathrm{m} \cdot s^2 + (T_\mathrm{m} + T_\mathrm{m}) \cdot s + 1} \tag{12}$$
$$= \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{T_\mathrm{e} \cdot s + 1} \cdot \frac{1}{T_\mathrm{m} \cdot s + 1} \tag{13}$$

3.2 Stör-Übertragungsfunktion

Die Laplace-Transformierten der zwei gekoppelten DGLs sind:

$$u(s) = (R_\mathrm{a} + L_\mathrm{a} \cdot s) \cdot i(s) + c \cdot \omega(s) \tag{14}$$
$$J \cdot s \cdot \omega(s) = c \cdot i(s) - M_\mathrm{L}(s) \tag{15}$$

Damit ergibt sich die Störübertragungsfunktion zu (Klemmen kurzgeschlossen, wenn Klemmen offen, dann $i = 0$):

$$G_{\omega,M_\mathrm{L}}|_{u=0} = \frac{\omega(s)}{M_\mathrm{L}(s)} = -\frac{R_\mathrm{a}}{c^2} \cdot \frac{\frac{L_\mathrm{a}}{R_\mathrm{a}} \cdot s + 1}{\frac{JL_\mathrm{a}}{c^2} \cdot s^2 + \frac{JR_\mathrm{a}}{c^2} \cdot s + 1} \tag{16}$$

Nach Einführung der beiden Zeitkonstanten $T_\mathrm{m} = \dfrac{JR_\mathrm{a}}{c^2}$ und $T_\mathrm{e} = \dfrac{L_\mathrm{a}}{R_\mathrm{a}}$ ergibt sich:

$$G_{\omega,M_\mathrm{L}}|_{u=0} = \frac{\omega(s)}{M_\mathrm{L}(s)} = -\frac{R_\mathrm{a}}{c^2} \cdot \frac{T_\mathrm{e} \cdot s + 1}{T_\mathrm{e}T_\mathrm{m} \cdot s^2 + T_\mathrm{m} \cdot s + 1} \tag{17}$$

Für $T_\mathrm{m} >> T_\mathrm{e}$ gilt:

$$\begin{aligned}
G_{\omega,M_\mathrm{L}}|_{u=0} = \frac{\omega(s)}{M_\mathrm{L}(s)} &= -\frac{R_\mathrm{a}}{c^2} \cdot \frac{T_\mathrm{e} \cdot s + 1}{T_\mathrm{e}T_\mathrm{m} \cdot s^2 + T_\mathrm{m} \cdot s + 1} && (18)\\
&= -\frac{R_\mathrm{a}}{c^2} \cdot \frac{T_\mathrm{e} \cdot s + 1}{T_\mathrm{e}T_\mathrm{m} \cdot s^2 + (T_\mathrm{m} + T_\mathrm{m}) \cdot s + 1} && (19)\\
&= -\frac{R_\mathrm{a}}{c^2} \cdot \frac{T_\mathrm{e} \cdot s + 1}{T_\mathrm{e} \cdot s + 1} \cdot \frac{1}{T_\mathrm{m} \cdot s + 1} && (20)\\
&= -\frac{R_\mathrm{a}}{c^2} \cdot \frac{1}{T_\mathrm{m} \cdot s + 1} && (21)
\end{aligned}$$

Durch Superposition kann man ω ermitteln, wenn eine Spannung UND ein Lastmoment wirken:

$$\omega = \omega|_{u=0} + \omega|_{M_\mathrm{L}=0} \tag{22}$$

4 Stationäre Kennlinie der GNM

Im stationären Fall (Ableitungen von i und ω sind null) ist das innere Moment gleich dem anliegenden Lastmoment (Reibung nicht berücksichtigt)! Nachfolgend einige wichtige Beziehungen:

1. Maschengleichung für den stationären Fall

$$0 = i \cdot R_\mathrm{a} + c \cdot \omega \tag{23}$$

2. Drallsatz für den stationären Fall

$$0 = \underbrace{c \cdot i}_{M_\mathrm{i}} - M_\mathrm{L} \tag{24}$$

3. Drehmomentbeziehung

$$M = M_\mathrm{L} = M_\mathrm{i} - M_\mathrm{R} \tag{25}$$

4. Zusammenhamg zwischen Winkelgeschwindigkeit und Drehzahl (in 1/s=Hz)

$$\omega = 2\pi f \tag{26}$$

5. Zusammenhamg zwischen Winkelgeschwindigkeit Umfangsgeschwindigkeit

$$v = \omega \cdot r \tag{27}$$

6. Leistung

$$P = \omega \cdot M \tag{28}$$

7. Geradengleichung

$$\omega = \frac{u}{c} \underbrace{- \frac{R_\text{a}}{c^2}}_{m} M \tag{29}$$

8. Steigung der Geraden

$$m = -\frac{R_\text{a}}{c^2} \tag{30}$$

9. Geradengleichung nach u umgestellt

$$u = \frac{R_\text{a}}{c} M + c \cdot \omega \tag{31}$$

10. Anlaufmoment

$$M_\text{an} = c \cdot i_\text{an} = \frac{u}{R_\text{a}} \cdot c \tag{32}$$

11. Reibmoment

$$M_\text{R} = c \cdot i_\text{leer,re} \tag{33}$$

12. Leerlaufwinkelgeschwindigkeit (ideal, $M_\text{R} = 0$)

$$\omega_\text{leer,id} = \frac{u}{c} \tag{34}$$

13. Leerlaufwinkelgeschwindigkeit (real, $M_\text{R} \neq 0$)

$$\omega_\text{leer,re} = \frac{u}{c} - \frac{R_\text{a}}{c^2} M_\text{R} \tag{35}$$

5 Wirkungsgrad der GNM

Die allgemeine Definition für den Wirkungsgrad lautet:

$$\eta = \frac{\text{abgegebene Leistung}}{\text{aufgenommene Leistung}} \tag{36}$$

Im Falle der GNM also:

$$\eta = \frac{(M_\mathrm{i} - M_\mathrm{R}) \cdot \omega}{u \cdot i} \tag{37}$$

Ersetzt man ω mit $(u - i \cdot R_\mathrm{a})\dfrac{1}{c}$ und i mit $\frac{M_\mathrm{i}}{c}$, so ergibt sich:

$$\eta = \left(1 - \frac{M_\mathrm{R}}{M_\mathrm{i}}\right) \cdot \left(1 - \frac{M_\mathrm{i}}{M_\mathrm{an}}\right) \tag{38}$$

Das (innere) Drehmoment beim maximalen Wirkungsgrad $M_{\eta,\mathrm{max}}$ ergibt sich zu:

$$M_{\eta,\mathrm{max}} = \sqrt{M_\mathrm{R} \cdot M_\mathrm{an}} \tag{39}$$

Der maximale Wirkungsgrad η_max lässt sich wie folgt berechnen:

$$\eta_\mathrm{max} = \left(1 - \sqrt{\frac{M_\mathrm{R}}{M_\mathrm{an}}}\right)^2 \tag{40}$$