

Formelsammlung für Regelungstechnik 1

Hochschule Heilbronn
Wintersemester 2005/2006
Mechatronik und Mikrosystemtechnik

Verfasser:
Manuel Kühner (MM5)

erstellt mit \LaTeX

Inhaltsverzeichnis

1 Griechische Buchstaben	4
2 Sonstiges	5
2.1 quadratische Gleichungen	5
2.2 binomische Formeln	5
2.3 Logarithmengesetze	5
2.4 Wurzeln	6
2.5 Wichtige Systemfunktionen	6
3 Linearisierung	7
3.1 Linearisierung einer statischen Kennlinie mit einer Variablen	7
3.1.1 anschauliche Vorgehensweise	7
3.1.2 formale Vorgehensweise (Taylor-Reihe)	7
3.2 Linearisierung einer statischen Kennlinie mit mehreren unabh. Variablen	7
3.2.1 anschauliche Vorgehensweise	7
3.2.2 formale Vorgehensweise (Taylor-Reihe)	7
3.3 Linearisierung einer nichtlinearen Dgl.	8
4 Partial-Bruch-Zerlegung (PBZ)	10
4.1 Methode 1	10
4.1.1 reelle einfache Pole	10
4.1.2 mehrfach reelle Pole	10
4.2 Methode 2	11
4.2.1 Bedingung	11
4.2.2 Ansatz für einfache reelle Nullstellen	11
4.2.3 Ansatz für mehrfache reelle Nullstellen	11
4.2.4 Ansatz für einfache komplexe Nullstellen	11
4.2.5 Möglichkeiten zur Bestimmung der Koeffizienten	12
5 Die Laplace-Transformation	13
5.1 Definition	13
5.2 Rechenregeln	13
5.2.1 Linearität	13
5.2.2 Ähnlichkeitssatz	13
5.2.3 Dämpfungssatz	13
5.2.4 Verschiebungssatz	13
5.2.5 Differentiationssatz für die Originalfunktion	13
5.2.6 Integrationssatz	14
5.2.7 Faltungsintegral	14
5.3 Endwert- und Anfangswertsatz	14
5.3.1 Endwertsatz	14
5.3.2 Anfangswertsatz	15

5.4	Tabelle wichtiger Laplace-Transformierter	15
6	Blockschaltbildumformung	16
6.1	Reihenschaltung	16
6.2	Parallelschaltung	16
6.3	Kreisschaltung	17
7	Phasenminimum Systeme	18
7.1	Definition	18
7.2	Eigenschaften	18
7.3	Zerlegung nicht phasenminimaler Systeme	18
7.3.1	Allpass	18
7.3.2	Beispiel	18
8	Stabilitätskriterien	20
8.1	Definitionen	20
8.2	einzelne Systeme (keine geschlossene Regelkreise)	20
8.2.1	Kriterien	20
8.2.2	Beiwerte-Kriterium	20
8.2.3	Hurwitz-Kriterium	21
8.3	geschlossene Regelkreise (Nyquist)	23
9	Trigonometrische Formeln	24
9.1	elementare Beziehungen und Umrechnungen	24
9.2	Additionstheoreme	24
9.3	Formeln für Winkelvielfache	25
9.3.1	Formeln für doppelte Winkel	25

1 Griechische Buchstaben

<i>A</i>	α	Alpha	<i>N</i>	ν	Ny
<i>B</i>	β	Beta	Ξ	ξ	Xi
Γ	γ	Gamma	<i>O</i>	o	Omikron
Δ	δ	Delta	Π	π	Pi
<i>E</i>	ϵ	Epsilon	<i>P</i>	ρ	Rho
<i>Z</i>	ζ	Zeta	Σ	σ	Sigma
<i>H</i>	η	Eta	<i>T</i>	τ	Tau
Θ	θ	Theta	<i>Y</i>	υ	Ypsilon
<i>I</i>	ι	Iota	Φ	φ	Phi
<i>K</i>	κ	Kappa	<i>X</i>	χ	Chi
Λ	λ	Lambda	Ψ	ψ	Psi
<i>M</i>	μ	My	Ω	ω	Omega

2 Sonstiges

2.1 quadratische Gleichungen

Ausgangsgleichung hat folgende Form:

$$x^2 + px + q = 0 \quad (2.1.1)$$

dann gilt:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad (2.1.2)$$

Ausgangsgleichung hat folgende Form:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (2.1.3)$$

dann gilt:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (2.1.4)$$

2.2 binomische Formeln

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (2.2.1)$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (2.2.2)$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2 \quad (2.2.3)$$

2.3 Logarithmengesetze

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y) \quad (2.3.1)$$

$$\log_a(x^r) = r \log_a(x) \quad (2.3.2)$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y) \quad (2.3.3)$$

$$\log_a(\sqrt[n]{x}) = \log_a\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{\log_a(x)}{n} \quad (2.3.4)$$

2.4 Wurzeln

$$x = \sqrt[n]{a} \quad (2.4.1)$$

- n - Wurzelexponent
- a - Radikand

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \quad (2.4.2)$$

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}} \quad (2.4.3)$$

$$\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad (2.4.4)$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (2.4.5)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a} \quad (2.4.6)$$

$$\sqrt[n]{a} \sqrt[m]{a} = \sqrt[nm]{a^{n+m}} \quad (2.4.7)$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a^{m-n}} \quad (2.4.8)$$

2.5 Wichtige Systemfunktionen

Testfunktionen:

- Eingangsgrößen: $u(t)$ bzw. $u(s)$
- Ausgangsgrößen: $y(t)$ bzw. $y(s) [= G(s)u(s)]$

Bezeichnung	$u(t)$	$u(s)$	$g(t)$	$y(s)$	Bezeichnung
Impuls	$\delta(t)$ Delta	1	$g(t)$	$G(s) \cdot 1 = G(s)$	Impulsantwort, Gewichtsfunktion
Sprung	$\sigma(t)$ Sigma	$\frac{1}{s}$	$h(t)$	$G(s) \cdot \frac{1}{s} = H(s)$	Sprungantwort, Übergangsfunktion
Rampe	t	$\frac{1}{s^2}$	$r(t)$	$G(s) \cdot \frac{1}{s^2} = R(s)$	Rampenantwort

- Impuls $\cdot \frac{1}{s} =$ Sprung (entspricht Integration im Zeitbereich $\rightarrow \int dt$)
- Sprung $\cdot \frac{1}{s} =$ Rampe (entspricht Integration im Zeitbereich)
- Rampe $\cdot s =$ Sprung (entspricht Ableitung im Zeitbereich $\rightarrow \frac{d}{dt}$)
- Sprung $\cdot s =$ Impuls (entspricht Ableitung im Zeitbereich)

3 Linearisierung

3.1 Linearisierung einer statischen Kennlinie mit einer Variablen

Zu statischen nicht linearen Kennlinien zählen z.B. **Geraden die nicht durch den Ursprung gehen** und **Parabeln**.

3.1.1 anschauliche Vorgehensweise

- Wahl eines Arbeitspunktes auf der Kennlinie.
- Dieser AP ist Ursprung eines neuen Koordinatensystems.
- Die nichtlineare Kennlinie wird näherungsweise durch eine Ursprungsgerade im neuen Koordinatensystem beschrieben (Tangente).

3.1.2 formale Vorgehensweise (Taylor-Reihe)

Es wird nur bis zur ersten Ordnung entwickelt (AP → Entwicklungsstelle).

$$\begin{aligned}
 y &= f(u) \\
 y &= \underbrace{f(u_0)}_{=y_0} + \left. \frac{df}{du} \right|_{u=u_0} \Delta u + \dots \text{höhere Ordnung} \\
 y - y_0 = \Delta y &= \left. \frac{df}{du} \right|_{u=u_0} \Delta u
 \end{aligned}$$

3.2 Linearisierung einer statischen Kennlinie mit mehreren unabh. Variablen

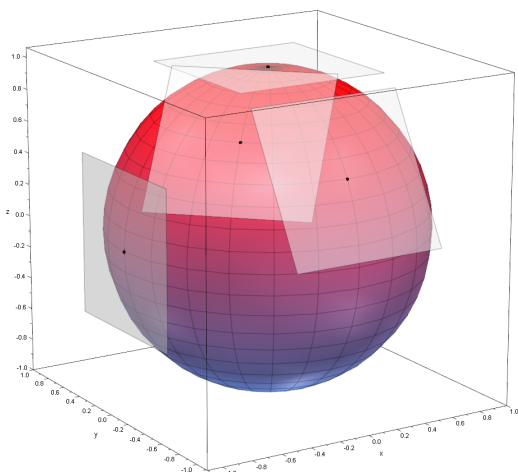
3.2.1 anschauliche Vorgehensweise

Ersatz der Funktion durch die **Tangentialebene** im Arbeitspunkt.

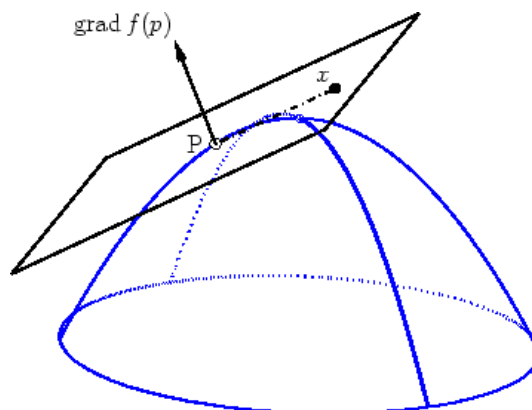
3.2.2 formale Vorgehensweise (Taylor-Reihe)

Es wird nur bis zur ersten Ordnung entwickelt (AP → Entwicklungsstelle).

$$\begin{aligned}
 y &= f(u, z) \\
 y &= \underbrace{f(u_0, z_0)}_{=y_0} + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{y=y_0 \text{ und } z=z_0} \overbrace{(u - u_0)}^{=\Delta u} + \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{y=y_0 \text{ und } z=z_0} \overbrace{(z - z_0)}^{=\Delta z} \\
 y - y_0 = \Delta y &= \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{y=y_0 \text{ und } z=z_0} \Delta u + \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{y=y_0 \text{ und } z=z_0} \Delta z
 \end{aligned}$$



(a) Tangentialebenen an einer Kugel



(b) Tangentialebene mit Normalenvektor

Abbildung 1: Visualisierungen von Tangentialebenen (Quellen: <http://schule.mupad.de/aktuelles/presse/bilder/data/grafiken/tangentialebene.png> und <http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/inhalt/aussage/aussage542/img7.png>)

3.3 Linearisierung einer nichtlinearen Dgl.

Zuerst muss die Gleichung nach der **höchsten Ableitung** umgestellt werden (in technischen Systemen ist die Variable, die mit der höchsten Ableitung vorkommt i.d.R. die Ausgangsgröße). Unser Bsp.:

$$\dot{y} = f(y, u) = y(y - 1) + u$$

Dann wird eine **Taylor-Reihen-Entwicklung** für eine Funktion mit mehreren Variablen bis zur ersten Ordnung durchgeführt. Die Entwicklungsstelle ($u \rightarrow u_0$ usw.) ist ein möglicher Arbeitspunkt (AP-Ruhelage). Der AP zeichnet sich dadurch aus, dass alle zeitlichen Ableitungen null sind (nicht lineare Systeme haben unendlich viele Ruhelagen).

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \underbrace{f(y_0, u_0)}_{=\dot{y}_0} + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{y=y_0 \text{ und } u=u_0} \Delta y + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{y=y_0 \text{ und } u=u_0} \Delta u \\ \underbrace{\dot{y} - \dot{y}_0}_{=\Delta \dot{y}} &= \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{y=y_0 \text{ und } u=u_0} \Delta y + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{y=y_0 \text{ und } u=u_0} \Delta u \\ \Delta \dot{y} &= \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{y=y_0 \text{ und } u=u_0} \Delta y + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{y=y_0 \text{ und } u=u_0} \Delta u \end{aligned}$$

Nun muss man die einzelnen partiellen Ableitungen (im AP!) ausrechnen. Dabei sind

die anderen Variablen jeweils als konstant zu betrachten.
In unserem Beispiel (man beachte die Indizes bei y_0 und u_0):

$$\left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{y=y_0 \text{ und } u=u_0} = 1$$
$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{y=y_0 \text{ und } u=u_0} = 2y_0 - 1$$

Jetzt kann man die part. Ableitungen einsetzen:

$$\Delta y = (2y_0 - 1) \Delta y + 1 \cdot \Delta u$$

4 Partial-Bruch-Zerlegung (PBZ)

4.1 Methode 1

4.1.1 reelle einfache Pole

$$\begin{aligned}
 G &= \frac{k(b_n \cdot s^n + \dots + b_1 \cdot s + b_0)}{(s - \alpha_1) \cdot \dots \cdot (s - \alpha_n)} \rightarrow \text{Nenner in Faktoren, entspricht Reihenschaltung} \\
 &= c_0 + \frac{c_1}{s - \alpha_1} + \dots + \frac{c_n}{s - \alpha_n} \rightarrow \text{PBZ-Darstellung, entspricht Parallelschaltung} \\
 &= \frac{b_n \cdot s^n + \dots + b_1 \cdot s + b_0}{a_n \cdot s^n + \dots + a_1 \cdot s + a_0} \rightarrow \text{Zähler- und Nennerpolynom ausmultipliziert}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_0 &= k \cdot \cancel{b_n} = \frac{\cancel{b_n}}{a_n} = \frac{1}{a_n} \\
 c_i &= \lim_{s \rightarrow \alpha_i} (G(s) \cdot (s - \alpha_i)) \rightarrow \text{mit } i=1,2,\dots,n
 \end{aligned}$$

c_0 ist normal null (wenn es ein echter Bruch ist \rightarrow Nennergrad $>$ Zählergrad).

4.1.2 mehrfach reelle Pole

$$\begin{aligned}
 G &= \frac{k(b_n \cdot s^n + \dots + b_1 \cdot s + b_0)}{(s - \alpha_1)^{n_1} \cdot (s - \alpha_2)^{n_2} \cdot \dots} \\
 &= c_0 + \frac{c_{11}}{s - \alpha_1} + \frac{c_{21}}{s - \alpha_2} + \dots \\
 &\quad + \frac{c_{12}}{(s - \alpha_1)^2} + \frac{c_{22}}{(s - \alpha_2)^2} + \dots \\
 &\quad + \vdots + \vdots + \dots \\
 &\quad + \frac{c_{1n_1}}{(s - \alpha_1)^{n_1}} + \frac{c_{2n_2}}{(s - \alpha_2)^{n_2}} + \dots \\
 &= \frac{b_n \cdot s^n + \dots + b_1 \cdot s + b_0}{a_n \cdot s^n + \dots + a_1 \cdot s + a_0}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_0 &= k \cdot \cancel{b_n} = \frac{\cancel{b_n}}{a_n} = \frac{1}{a_n} \\
 c_{ij} &= \frac{1}{(n_i - j)!} \left\{ \frac{d^{n_i - j}}{ds^{n_i - j}} (G(s) \cdot (s - \alpha_i)^{n_i}) \right\} \Bigg|_{s=\alpha_i} \\
 &\rightarrow \text{mit } i=\text{Polnummer und } j=\text{Laufnummer} \\
 &\rightarrow n_i = s \text{ Vielfachheit des } i\text{-ten Poles}
 \end{aligned}$$

4.2 Methode 2

4.2.1 Bedingung

- Der **Nennergrad** muss **größer** sein wie der **Zählergrad**. Ist der Nennergrad kleiner oder gleich dem Zählergrad ist eine Polynomdivison mit Rest durchzuführen (alternativ mit Taschenrechner).

4.2.2 Ansatz für einfache reelle Nullstellen

$$G = \frac{C_1}{s - \alpha_1} + \frac{C_2}{s - \alpha_2} + \dots + \frac{C_n}{s - \alpha_n} \quad (4.2.1)$$

Beispiel:

$$\frac{2s + 3}{(s - 2)(s + 5)} = \frac{C_1}{s - 2} + \frac{C_2}{s + 5} \text{ hier: } \alpha_1 = 2 \text{ und } \alpha_2 = -5$$

4.2.3 Ansatz für mehrfache reelle Nullstellen

$$G = \frac{C_1}{s - \alpha_1} + \frac{C_2}{(s - \alpha_1)^2} + \dots + \frac{C_n}{(s - \alpha_1)^n} \quad (4.2.2)$$

n ist die Vielfachheit der Nullstelle. Zum Beispiel:

$$\frac{2s + 3}{(s - 2)^2(s + 5)} = \frac{A_1}{(s - 2)^{(1)}} + \frac{A_2}{(s - 2)^2} + \frac{B_1}{s + 5} \text{ hier: } n = 2$$

4.2.4 Ansatz für einfache komplexe Nullstellen

Wenn ein Polynom $s^2 + as + b^2$ keine reelle Lösungen besitzt lässt man es im Ansatz so stehen und bildet die Koeffizienten wie folgt:

(Bemerkung: Bei **reellen Koeffizienten** kann es nur konjugiert komplexe Nullstellen geben! Unsere Koeffizienten sind zum Beispiel ohmsche Widerstände, Induktivitäten, Massen und Massenträgheitsmomente \rightarrow reell.)

$$G = \frac{C_1s + C_2}{s^2 + as + b} \quad (4.2.3)$$

Beispiel:

$$G = \frac{3s^3 + s^2 - 1}{s^2(s^2 + s + 1)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s^2} + \frac{C_1 + C_2s}{s^2 + s - 1}$$

weiteres Beispiel:

$$G = \frac{5s^2 + 4}{s^4 + 5s^2 + 4}$$

$\rightarrow s^4 + 5s^2 + 4 = (s^2 + 1)(s^2 + 4)$ die konjugiert komplexen Nullstellenpaare sind $\pm i$ und $\pm 2i$

$$G = \frac{A_1 + A_2s}{s^2 + 1} + \frac{B_1 + B_2s}{s^2 + 4} \text{ Hinweis: } \pm i^2 = -1 \text{ und } (\pm 2i)^2 = -4$$

4.2.5 Möglichkeiten zur Bestimmung der Koeffizienten

Anhand von zwei Beispielen sollen zuerst der **Koeffizientenvergleich** und dann das **Nullstellen einsetzen** erklärt werden.

Beispiel 1:

$$\begin{aligned}
 G = \frac{6s^2 - s + 1}{s^3 - s} &= \frac{6s^2 - s + 1}{s(s^2 - 1)} = \frac{6s^2 - s + 1}{s(s-1)(s+1)} \\
 \frac{6s^2 - s + 1}{s(s-1)(s+1)} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s-1} \text{ jetzt mit dem Nenner durchmultiplizieren} \\
 6s^2 - s + 1 &= A(s+1)(s-1) + Bs(s-1) + Cs(s+1) \\
 &= s^2(A+B+C) + s(C-B) - A
 \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned}
 6 &= A + B + C \\
 -1 &= C - B \\
 -1 &= A \rightarrow A = -1 \\
 &\rightarrow C = 3 \\
 &\rightarrow B = 4 \\
 G &= \frac{-1}{s} + \frac{4}{s+1} + \frac{3}{s-1}
 \end{aligned}$$

Beispiel 2 (Anfang wie bei Beispiel 1):

$$\begin{aligned}
 &\dots \\
 6s^2 - s + 1 &= A(s+1)(s-1) + Bs(s-1) + Cs(s+1)
 \end{aligned}$$

Nullstellen (0,-1,1) einsetzen.

$$\begin{aligned}
 &\text{mit } s = 0 \\
 1 &= A(1)(-1) = -A \rightarrow A = -1 \\
 &\text{mit } s = -1 \\
 8 &= 2B \rightarrow B = 4 \\
 &\text{mit } s = 1 \\
 6 - 1 + 1 &= 6 = 2C \rightarrow C = 3
 \end{aligned}$$

Würde man nicht die Nullstellen einsetzen (bei mehrfachen Nullstellen kann man eine Nullstelle ja nur einmal einsetzen \rightarrow man hat dann zu wenige), so ergibt sich ein einfach zu lösendes Gleichungssystem. Dazu muss man selbst gewählte Werte einsetzen (z.B. -2, -1, 0, 1, 2).

5 Die Laplace-Transformation

5.1 Definition

$$G(s) = \int_0^{\infty} g(t) \cdot e^{-st} dt = \mathcal{L}\{g(t)\} \quad (5.1.1)$$

Dabei ist s eine komplexe Variable und $g(t) = 0$ für $t < 0$!

5.2 Rechenregeln

5.2.1 Linearität

$$\mathcal{L}\{c \cdot g(t)\} = c \cdot G(s) \quad (5.2.1)$$

$$\mathcal{L}\{g_1(t) \pm g_2(t)\} = G_1(s) \pm G_2(s) \quad (5.2.2)$$

5.2.2 Ähnlichkeitssatz

$$\mathcal{L}\{g(c \cdot t)\} = \frac{1}{c} G\left(\frac{s}{c}\right) \quad (5.2.3)$$

$$G(c \cdot s) = \left\{ \frac{1}{c} g\left(\frac{t}{c}\right) \right\} \quad (5.2.4)$$

5.2.3 Dämpfungssatz

Minuszeichen im Exponenten beachten!

$$\mathcal{L}\{e^{-at} \cdot g(t)\} = G(s + a) \quad (5.2.5)$$

5.2.4 Verschiebungssatz

$$\mathcal{L}\{g(t - t_0) \cdot \sigma(t - t_0)\} = e^{-st_0} G(s) \quad (5.2.6)$$

5.2.5 Differentiationssatz für die Originalfunktion

Ist die Funktion $g(t)$ für $t > 0$ differenzierbar (keine Sprünge und Ecken) und hat der Differentialquotient $g^n(t)$ eine Bildfunktion, so gilt allgemein:

$$\mathcal{L}\{g^n(t)\} = s^n G(s) - s^{n-1} g(+0) - s^{n-2} \dot{g}(+0) - \dots - s \cdot g^{n-2}(+0) - g^{n-1}(+0) \quad (5.2.7)$$

Dabei sind $g^n(+0)$ die Grenzwerte denen $g^n(+0)$ zustreben, wenn t von rechts gegen 0 geht (Anfangsbedingungen). Sind **alle Anfangsbedingungen gleich null** (und nur dann) ergibt sich:

$$\mathcal{L}\{g^n(t)\} = s^n G(s) \quad (5.2.8)$$

5.2.6 Integrationsatz

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^t g(\tau), d\tau \right\} = \frac{1}{s} G(s) \quad (5.2.9)$$

5.2.7 Faltungsintegral

$$\mathcal{L} \{g_1(t) * g_2(t)\} = G_1(s) \cdot G_2(s) \quad (5.2.10)$$

$$= \int_0^t g_1(\tau) \cdot g_2(t - \tau), d\tau \quad (5.2.11)$$

Anwendung:

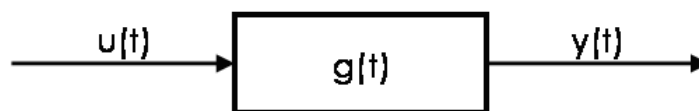


Abbildung 2: Blockschaltbild

$$y(t) = \int_0^t g(\tau) \cdot u(t - \tau), d\tau$$

$$Y(s) = \mathcal{L}^{-1} \{y(t)\}$$

$$= G(s) \cdot U(s)$$

5.3 Endwert- und Anfangswertsatz

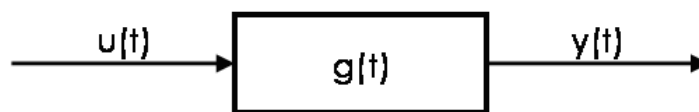


Abbildung 3: Blockschaltbild

5.3.1 Endwertsatz

$$y(t) \text{ für } t \rightarrow \infty = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot y(s) \quad (5.3.1)$$

Man muss **zuvor** sicherstellen, dass $y(t)$ für $t \rightarrow \infty$ existiert (mit Hilfe der Stabilitätskriterien).

5.3.2 Anfangswertsatz

$$y(t) \text{ für } t \rightarrow +0 = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot y(s) \quad (5.3.2)$$

Der Anfangswert muss ein fester Wert sein (ein Dirac wäre kein fester Wert).

5.4 Tabelle wichtiger Laplace-Transformierter

Dabei ist $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{C}$. Falls nicht anders vermerkt gilt $\operatorname{Re}(s) > 0$.

$g(t)$ für $t > 0$	$G(s)$
1	$\frac{1}{s}$
$\delta(t)$	1
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$ für $\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a)$
t^n	$\frac{n!}{s^{(n+1)}}$
$t^n \cdot e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ für $\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a)$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$t \cdot \sin(\omega t)$	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$t \cdot \cos(\omega t)$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$\frac{k\omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0 \cdot s + \omega_0^2}$	$\frac{k \cdot \omega_0 \cdot e^{-D\omega_0 t}}{\sqrt{1-D^2}} \cdot \sin(\omega_0 t \sqrt{1-D^2})$ $0 \leq D < 1$
$\frac{k\omega_0^2}{s(s^2 + 2D\omega_0 \cdot s + \omega_0^2)}$	$k \left[1 - e^{-D\omega_0 t} \left(\cos(\omega_0 t \sqrt{1-D^2}) + \frac{D}{\sqrt{1-D^2}} \sin(\omega_0 t \sqrt{1-D^2}) \right) \right]$ $0 \leq D < 1$

6 Blockschaltbildumformung

6.1 Reihenschaltung

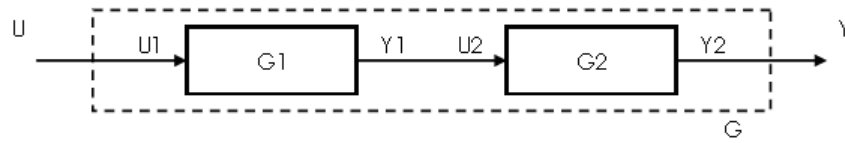


Abbildung 4: Reihenschaltung

$$G = G_1 \cdot G_2 \quad (6.1.1)$$

6.2 Parallelschaltung

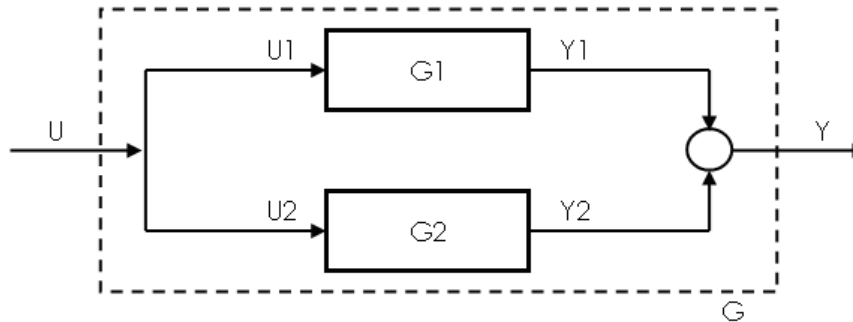


Abbildung 5: Parallelschaltung

$$G = G_1 + G_2 \quad (6.2.1)$$

6.3 Kreisschaltung

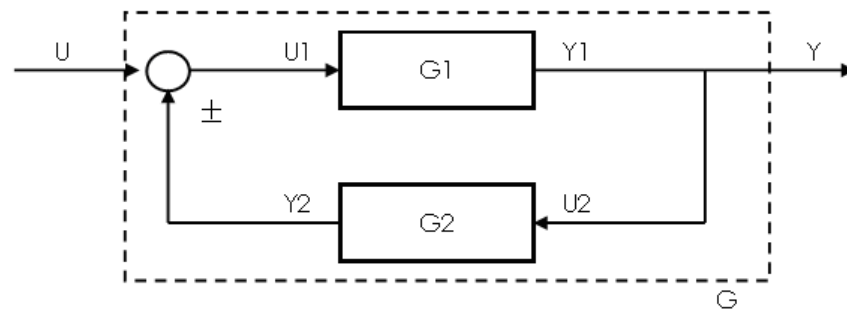


Abbildung 6: Reihenschaltung

$$G = \frac{G_1}{1 \mp G_1 \cdot G_2} \quad (6.3.1)$$

- Bei Gegenkopplung (Minus an Summationsstelle) steht im Nenner $1 + G_1 \cdot G_2$
- Bei Mitkopplung (Plus an Summationsstelle) steht im Nenner $1 - G_1 \cdot G_2$

7 Phasenminimum Systeme

7.1 Definition

- keine Pol- und Nullstellen in der rechten s-Halbebene (dürfen aber auf der Im-Achse sein)
 - damit sind sie automatisch nie instabil (sondern asymptotisch- oder grenzstabil)
- keine Totzeiten

7.2 Eigenschaften

Bei phasenminimalen Systemen kann man aus dem Verlauf des Amplitudenganges auf den Verlauf des Phasenganges schließen:

- Anhebung (+ **20 dB/Dek.**) des Amplitudenganges ergibt eine Anhebung des Phasenganges (+ **90°**)
- Absenkung (- **20 dB/Dek.**) des Amplitudenganges ergibt eine Absenkung des Phasenganges (- **90°**)

7.3 Zerlegung nicht phasenminimaler Systeme

Man kann jedes Nicht-Phasenminimum-System in ein Phasenminimum-System und einen Allpass zerlegen (Reihenschaltung).

7.3.1 Allpass

- $|G(j\omega)| = 1$ (für alle Frequenzen)
- Pol- und Nullstellen sind symmetrisch zu der Im-Achse (z.B. PS bei $-\frac{1}{T}$ und NS bei $\frac{1}{T}$)
- Beispiel: $G(s) = \frac{-Ts + 1}{Ts + 1}$

7.3.2 Beispiel

$$G(s) = \frac{-T_1s + 1}{(T_2s + 1)(T_3s + 1)} \text{ mit } T_i > 0 \quad (7.3.1)$$

Hier haben wir eine Nullstelle bei $\frac{1}{T_1}$ und zwei Polstellen in der linken s-Halbebene. Wäre eine Polstelle bei $-\frac{1}{T_1}$ könnte man einen Allpass bilden. Um die Gleichung nicht zu ändern wird noch eine Nullstelle bei $-\frac{1}{T_1}$ hingelegt (PS und NS heben sich auf - einfach Kürzen).

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{-T_1s + 1}{(T_2s + 1)(T_3s + 1)} \text{ mit } T_i > 0 \\
 G(s) &= G(s) \cdot \frac{T_1s + 1}{T_1s + 1} = G(s) \cdot \frac{\text{Nullstelle bei } -\frac{1}{T_1}}{\text{Polstelle bei } -\frac{1}{T_1}} \\
 &= \underbrace{\frac{T_1s + 1}{(T_2s + 1)(T_3s + 1)}}_{\text{Phasenminimum-System}} \cdot \underbrace{\frac{-T_1s + 1}{T_1s + 1}}_{\text{Allpass}}
 \end{aligned}$$

8 Stabilitätskriterien

8.1 Definitionen

- **asymptotisch stabil** - Gewichtsfunktion (Impulsantwort) sinkt asymptotisch auf null ab.
- **grenzstabil** - Betrag der Gewichtsfunktion überschreitet mit wachsendem t einen endlichen Wert nicht oder Gewichtsfunktion strebt einem endlichen Grenzwert zu.
- **instabil** - Betrag der Gewichtsfunktion geht mit wachsendem t gegen unendlich.

8.2 einzelne Systeme (keine geschlossene Regelkreise)

8.2.1 Kriterien

- Haben **sämtliche Pole** einer Übertragungsfunktion einen **negativen Realteil**, dann ist das System **asymptotisch stabil**.
- Ist ein **einfacher reeller Pol im Ursprung** oder ein **einfacher konj. komplexer Pol** auf der **Im-Achse**, so ist das System **grenzstabil**.
- Bei zwei- bzw. mehrfachen Polen (reell oder konj. kompl.) ist das System instabil. Sobald ein Pol in der rechten s-Halbebene ist sowieso!

Wenn man das Nennerpolynom (Polstellen) in der Form $(s+s_1)(s+s_2)\dots$ hat, dann kann man einfach die Stabilität anhand der oben genannten Kriterien ermitteln. Ansonsten gibt es (in dieser FoSa) **Algebraische Verfahren zur Stabilitätsanalyse**.

8.2.2 Beiwerte-Kriterium

notwendige Bedingung für das Nennerpolynom - Wenn das System asymptotisch stabil ist, müssen alle **Koeffizienten** der charakteristischen Gleichung **von null verschieden** sein und das **gleiche Vorzeichen** besitzen (Vorzeichenbedingung). Ist ein Koeffizient null, dann kann das System noch grenzstabil sein - ist aber nicht mehr asymp. stabil.

hinreichende Bedingung für Systeme 1. und 2. Ordnung - notwendige Bedingung ist gleichzeitig hinreichende Bedingung

hinreichende Bedingung für Systeme 3. Ordnung - Das System ist asymptotisch stabil, wenn $a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0 = 0 \rightarrow a_0a_3 - a_1a_2 < 0$ gilt.

$\omega_{\text{kritisch}} = \sqrt{\frac{a_1}{a_3}} = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$ (Falls $\frac{a_1}{a_3} = \frac{a_0}{a_2}$ gilt, ist das System grenzstabil und schwingt mit der Frequenz ω_{kritisch})

hinreichende Bedingung für Systeme 4. Ordnung - Das System ist asymptotisch stabil, wenn $a_4 a_1^2 + a_0 a_3^2 - a_1 a_2 a_3 < 0$ (alle $a_i > 0$) ODER $a_4 a_1^2 + a_0 a_3^2 - a_1 a_2 a_3 > 0$ (alle $a_i < 0$) gilt. $\omega_{\text{kritisch}} = \sqrt{\frac{a_1}{a_3}}$

hinreichende Bedingung für Systeme 5. Ordnung - Das System ist asymptotisch stabil, wenn $a_2 a_5 - a_3 a_4 < 0$ UND $(a_1 a_4 - a_0 a_5)^2 - (a_3 a_4 - a_2 a_5)(a_1 a_2 - a_0 a_3) < 0$ gilt. $\omega_{\text{kritisch}}^2 = \frac{a_3}{2a_5} \pm \sqrt{\frac{a_3^2}{4a_5^2} - \frac{a_1}{a_5}}$ für $a_3^2 - 4a_5 a_1 > 0$

8.2.3 Hurwitz-Kriterium

Ein Polynom mit ($a_n > 0$)

$$\begin{aligned} p(s) &= a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 \\ &= a_n (s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n) \end{aligned}$$

heißt Hurwitz-Polynom, wenn alle Wurzeln s_i ($i = 1, 2, \dots$) einen negativen Realteil haben (Hurwitz-Polynom \rightarrow asymptotisch stabil). Für die Koeffizienten eines Hurwitz-Polynom hat Hurwitz folgende **Bedingungen** angegeben:

1. alle Koeffizienten $a_i \neq 0$
2. alle Koeffizienten a_i haben ein **positives** Vorzeichen (nicht wie bei Beiwerte-Kriterium gleiches VZ!)
3. folgende n Determinanten sind positiv:

$$\begin{aligned} D_1 &= a_1 > 0 \\ D_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0 \\ D_3 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0 \\ &\vdots \\ D_{n-1} &= \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} \end{vmatrix} > 0 \\ D_n &= a_n \cdot D_{n-1} > 0 \end{aligned}$$

allgemein:

$$D_i = \begin{vmatrix} \searrow & \rightarrow & \rightarrow & \dots & \dots \\ \leftarrow & \searrow & \rightarrow & \dots & \dots \\ \leftarrow & \leftarrow & \searrow & \rightarrow & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \searrow & \dots \end{vmatrix} > 0$$

$$D_i = \begin{vmatrix} \searrow a_1 & \rightarrow a_0 & \rightarrow 0 & \dots & \dots \\ \leftarrow a_3 & \searrow a_2 & \rightarrow a_1 & \dots & \dots \\ \leftarrow a_5 & \leftarrow a_4 & \searrow a_3 & \rightarrow a_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \searrow a_4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} > 0$$

- $i \rightarrow$ Anzahl der Zeilen/Spalten
- \searrow aufsteigend auf der Diagonalen (beginnen mit a_1)
- \rightarrow kleiner (Nummer des Koeffizienten)
- \leftarrow größer (Nummer des Koeffizienten)
- nicht vorhandene Koeffizienten null setzen

8.3 geschlossene Regelkreise (Nyquist)

!Sehr verkürzte Darstellung!

Soll der geschlossene Regelkreis asymptotisch stabil sein, so muss folgende Beziehung für die stetige Phasenänderung $\Delta\varphi$ gelten:

$$\Delta\varphi = P \cdot \pi + \mu \cdot \frac{\pi}{2} \quad (8.3.1)$$

- μ ist die Anzahl der Pole auf der Im-Achse (des offenen Regelkreises $G_0(s)$)
- P ist die Anzahl der Pole auf der rechten s-Halbebene (des offenen Regelkreises $G_0(s)$)
- offener Regelkreis $G_0(s)$ beim Standardregelkreis: $G_0(s) = G_{Regler}(s) \cdot G_{Strecke}(s)$

Hinweis:

Die Aussage über die Stabilität des geschlossenen Regelkreises wird anhand der Kenntnis über den offenen Regelkreis getroffen!

Platz für eigene Ergänzungen:

9 Trigonometrische Formeln

9.1 elementare Beziehungen und Umrechnungen

$$\sin(\omega t) = -\frac{1}{2}j(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \quad (9.1.1)$$

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \quad (9.1.2)$$

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1 \quad (9.1.3)$$

$$\rightarrow \cos^2 \varphi = 1 - \sin^2 \varphi$$

$$\rightarrow \sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi$$

$$\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{1}{\cot \varphi} \quad (9.1.4)$$

	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	$\tan \varphi$	$\cot \varphi$
$\sin \varphi$	–	$\pm \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}$	$\pm \frac{\tan \varphi}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \varphi}}$
$\cos \varphi$	$\pm \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}$	–	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}}$	$\pm \frac{\cot \varphi}{\sqrt{1 + \cot^2 \varphi}}$
$\tan \varphi$	$\pm \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}}$	$\pm \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}}{\cos \varphi}$	–	$\frac{1}{\cot \varphi}$
$\cot \varphi$	$\pm \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}}{\sin \varphi}$	$\pm \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}}$	$\frac{1}{\tan \varphi}$	–

9.2 Additionstheoreme

$$\sin(\varphi_1 \pm \varphi_2) = \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 \pm \cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 \quad (9.2.1)$$

$$\cos(\varphi_1 \pm \varphi_2) = \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 \mp \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 \quad (9.2.2)$$

9.3 Formeln für Winkelvielfache

9.3.1 Formeln für doppelte Winkel

$$\sin 2\varphi = 2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \quad (9.3.1)$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \sin 2\varphi = \sin \varphi \cdot \cos \varphi$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \sin [2(\varphi + \Delta\varphi)] = \sin(\varphi + \Delta\varphi) \cdot \cos(\varphi + \Delta\varphi)$$

$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\varphi) \quad (9.3.2)$$

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\varphi) \quad (9.3.3)$$