

Private
Formelsammlung für Thermodynamik 1
TU München

Manuel Kühner und Veit Hammerstingl

SS 2008

Stand: 24.05.2009

Internetseite: www.bipede.de

Vorwort

Die vorliegende FoSa entstand im Rahmen meiner Prüfungsvorbereitung im Sommersemester 2008 – ich bin FHler (Hochschule Heilbronn) und TD1 war eine meiner Ergänzungsprüfungen zur Promotionszulassung.

Später hat mein Freund Veit die FoSa nochmal überarbeitet und ergänzt – vielen Dank an dieser Stelle.

Ich schlage vor, dass Du von Anfang an mit der FoSa arbeitest und sie mit Orientierungshilfen (Schnell-Zugriff-Marken) aufpimpst und sie ggf. ergänzt – siehe Abbildung 1. Ich meine, dass die FoSa zu umfangreich ist, um sich erst am Ende damit zu befassen.

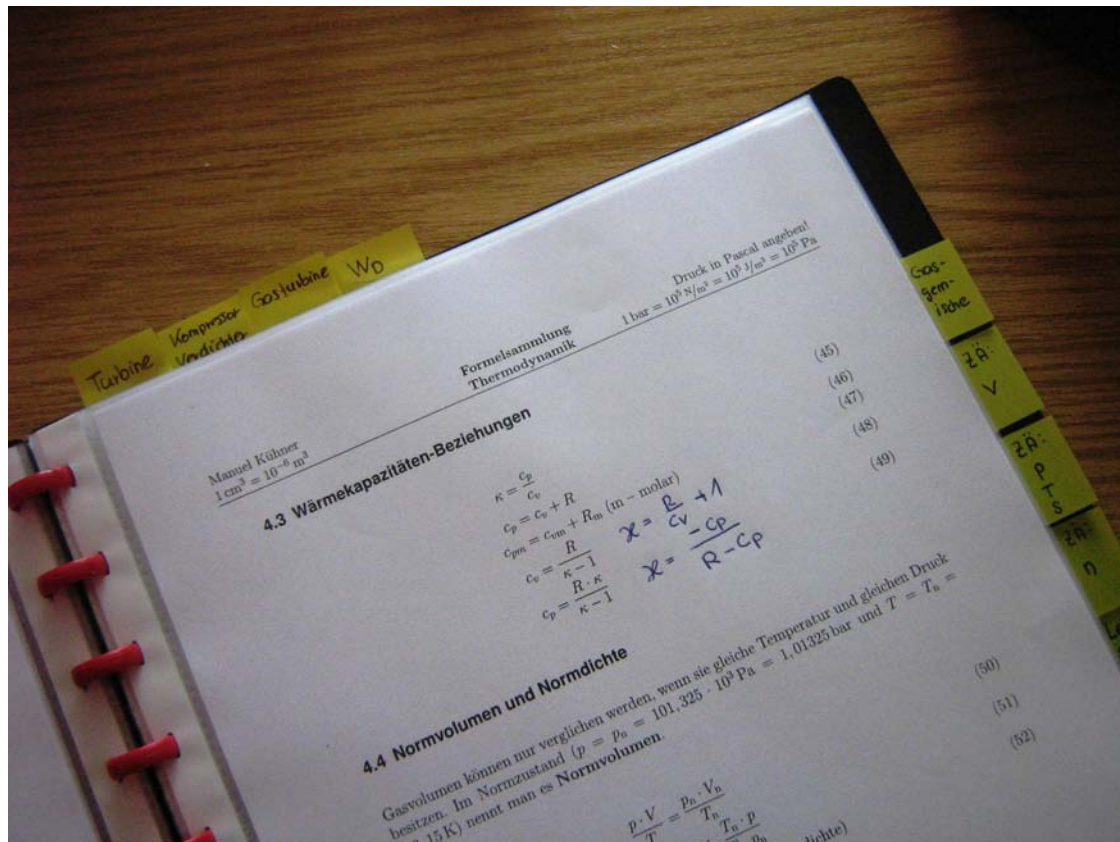


Abbildung 1: Foto meiner FoSa – gut zu sehen sind die Schnell-Zugriffs-Marken. Die FoSa lässt sich vorteilhaft in einem sogenannten *Sichtbuch* einordnen, so kann man einfach Seiten entnehmen und einfügen. Das Sichtbuch ist in diesem Fall von *Durable: Durable Easy Plus* Artikelnummer 2427.

manu am 24.05.2009

PS: Bitte von inhaltlichen Anfragen an mich absehen - ich kann das Zeug nicht mehr und zudem habe ich jetzt andere Sorgen.

$$c_v = \frac{R}{\kappa - 1} \quad c_{v,\text{Luft}} = 717,5 \text{ J/kgK}$$

$$h = c_p \cdot T$$

$$c_{p,\text{Luft}} = 1004,5 \text{ J/kgK} \quad c_p = \frac{R \cdot \kappa}{\kappa - 1}$$

Inhaltsverzeichnis

1	Allgemein	5
1.1	Auftrieb nach Archimedis	5
1.2	Höhenformel (bei konstanter Temperatur)	5
1.3	Einheiten	6
2	Erster Hauptsatz	7
2.1	Masse	7
2.2	Innere Energie / Enthalpie (Nur bei idealen Gasen verwenden!)	7
2.3	Isenthalpe Drosselung / Adiabate Drossel	8
3	Zweiter Hauptsatz	9
3.1	Entropie	9
3.1.1	Allgemein	9
3.1.2	ideale Gase	9
3.2	Exergie	10
4	Zustandsgleichung (ideale Gase)	11
4.1	Allgemein	11
4.2	Weitere Beziehungen	12
4.3	Wärmekapazitäten-Beziehungen	13
4.4	Normvolumen und Normdichte	13
4.5	Gasgemische	13
4.5.1	Allgemein	13
4.5.2	Gesetz nach Dalton und Amagat	16
4.6	Zustandsänderungen idealer Gase	17
4.6.1	Isochore ZÄ ($V = \text{konstant}$)	17
4.6.2	Isobare ZÄ ($p = \text{konstant}$)	18
4.6.3	Isotherme ZÄ ($T = \text{konstant}$)	18
4.6.4	Isentrope ZÄ ($S = \text{konstant}$)	19
4.6.5	Polytrope ZÄ	23
5	Zustandsgleichung (ideale Gase) – FoSa des Lehrstuhls	28
5.1	Arbeiten	28
5.1.1	geschlossenes System (ohne Δe)	29
5.1.2	offenes System (mit $\Delta e = \Delta e_{\text{pot}} + \Delta e_{\text{kin}}$)	31
6	Reale Fluide (2-Phasen-Zeugs)	33
6.1	Berechnung der Masse in einem Behälter	38
6.2	Erwärmen bei konstantem Volumen und konstanter Masse	39
6.3	Wenn etwas <i>strömt</i> (Rohrleitung, Behälter) – allgemein: nicht nur bei 2-Phasen-Zeugs	39
6.4	Überhitzter Dampf expandiert in einem (adiabaten!) Kolben – Nutzarbeit	40
6.5	Interpolation	41
7	Kreisprozesse	42
7.1	Otto-Motor	42

$$c_v = \frac{R}{\kappa - 1} \quad c_{v,\text{Luft}} = 717,5 \text{ J/kgK}$$

$$3 \quad h = c_p \cdot T$$

$$c_{p,\text{Luft}} = 1004,5 \text{ J/kgK} \quad c_p = \frac{R \cdot \kappa}{\kappa - 1}$$

7.1.1	Standard-Prozess	42
7.1.2	Realer Prozess	46
7.2	Verdichter/Kompressoren und Turbinen	48
7.2.1	Turbinen	48
7.2.2	Kompressoren/Verdichter	51
7.3	Gasturbine	54

1 Allgemein

Bei der Erstellung dieser FoSa wurden u. a. folgende zwei Quellen verwendet:

- *Skriptum zur Vorlesung Thermodynamik I* (Version 6.9.2007) des *Lehrstuhls für Thermodynamik* an der *Technischen Universität München*
- *Taschenbuch der Physik* von *Horst Kuchling* (18. Auflage) erschienen im *Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag*

1.1 Auftrieb nach Archimedis

$$A = F_A = \varrho \cdot g \cdot V \quad (1)$$

$$= \frac{p}{RT} \cdot g \cdot V \quad (2)$$

Mit:

- ϱ – Dichte des **umgebenden** Fluids
- g – Erdbeschleunigung
- V – Verdrängtes Volumen
- T - Temperatur des umgebenden Fluids

1.2 Höhenformel (bei konstanter Temperatur)

$$dp = -g \cdot \varrho(z) dz \quad (3)$$

$$\text{mit } \varrho(z) = \frac{p(z)}{R \cdot T} \quad (4)$$

$$\rightarrow dp = -g \cdot \frac{p(z)}{R \cdot T} dz \quad (5)$$

$$\rightarrow \int_{p_0}^{p(z)} \frac{1}{p} dp = -\frac{g}{R \cdot T} \int_0^z 1 dz \quad (6)$$

$$\rightarrow \ln \left(\frac{p(z)}{p_0} \right) = -\frac{g}{R \cdot T} \cdot z \quad (7)$$

Dabei ist z die Höhenvariable.

1.3 Einheiten

- Masse

$$1 \text{ mg} = 1 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \quad (8)$$

$$1 \text{ g} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \quad (9)$$

- Energie

$$1 \text{ MJ} = 1 \cdot 10^6 \text{ J} \quad (10)$$

$$1 \text{ GJ} = 1 \cdot 10^9 \text{ J} \quad (11)$$

- Volumen

$$1 \text{ cm}^3 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ dm}^3 = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \quad (12)$$

$$1 \text{ Liter} = 1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \quad (13)$$

$$\text{Zylinder: } V_Z = r^2 \pi h = \frac{d^2}{4} \pi h \quad (14)$$

$$\text{Kugel: } V_K = \frac{4}{3} r^3 \pi = \frac{d^3}{6} \pi \quad (15)$$

- Oberfläche

$$\text{Zylinder: } O_Z = 2r\pi h = d\pi h \quad (16)$$

$$\text{Kugel: } O_K = 4r^2 \pi = d^2 \pi \quad (17)$$

- Kraft

$$F = p \cdot A \quad (18)$$

p - Druck in $[Pa]$

2 Erster Hauptsatz

$$dE_{\text{sys}} = dU + \underbrace{dE_{\text{kin}} + dE_{\text{pot}}}_{=0, \text{ wenn System in Ruhe}} = \sum_i Q_i + \sum_i W_i + \sum_i m_i \underbrace{\left(h_i + g \cdot z_i + \frac{c_i^2}{2} \right)}_e \quad (19)$$

Dabei ist Q_{12} beispielsweise $\dot{Q} \cdot \Delta t_{12}$.

Man unterscheidet entweder zwei verschiedene **Zeitpunkte** bzw. zwei **Zustände**:

$$E_2 - E_1 = \sum Q_{12} + \sum W_{12} + \sum m_{12} \cdot \left(h_{12} + g \cdot z_{12} + \frac{c_{12}^2}{2} \right) \quad (20)$$

$$\text{vereinfacht: } U_2 - U_1 = Q_{12} + W_{12} + m_{12} \cdot h \quad (21)$$

Oder man betrachtet die **zeitliche Änderung** – dabei werden dem System zugeführte Größen positiv und abgeführte Größen negativ gezählt:

$$\dot{E}_{\text{sys}} = \frac{dE_{\text{sys}}}{dt} = \sum_i \dot{Q}_i + \sum_i \dot{W}_i + \sum_i \dot{m}_i \left(h_i + g \cdot z_i + \frac{c_i^2}{2} \right) \quad (22)$$

$$\rightarrow U_2 - U_1 = \sum \dot{Q} \cdot \Delta t + \sum \dot{W} \cdot \Delta t + \sum \dot{m} \cdot \Delta t \left(h + g \cdot z + \frac{c^2}{2} \right) \quad (23)$$

2.1 Masse

$$m = \rho \cdot V = \frac{pV}{RT} \quad (24)$$

$$\dot{m} = \frac{m}{t} = \underbrace{\rho \cdot A \cdot c}_{\dot{v}} \quad (25)$$

2.2 Innere Energie / Enthalpie (Nur bei idealen Gasen verwenden!)

$$U = m \cdot c_v \cdot T \quad (26)$$

$$h = c_p \cdot T = u + pv = u + \frac{p}{\rho} \quad (27)$$

2.3 Isenthalpe Drosselung / Adiabate Drossel

Eine (stationär durchströmte) adiabate Drossel führt zu keiner Enthalpieänderung des Fluids, wenn man kinetische und potentielle Energieunterscheide vernachlässigen kann \rightarrow Isenthalpe Drosselung ($dh = 0$)

- Ideale Gase ändern ihre Temperatur nicht (Überströmversuch).
- Inkompressible Flüssigkeiten erhitzen sich.

ideales Gas: Enthalpie = $f(T)$

(28)

$$du = c_v \cdot dT \quad (29)$$

$$\rightarrow dh = c_p \cdot dT = 0 \quad (30)$$

$$\rightarrow du = 0 \quad (31)$$

$$dh = 0 = du + p \cdot dv + v \cdot dp \quad (32)$$

$$\rightarrow h = \text{konst!} \quad (33)$$

$$\rightarrow T = \text{konst!} \quad (34)$$

Wasser: $dv = 0$, da inkompressibel

(35)

$$\int_e^a du = - \int_a^e v dp \quad (36)$$

$$\rightarrow \Delta u = -v(p_a - p_e) = \frac{p_e - p_a}{\rho_{\text{Wasser}}} \quad (37)$$

Index e – Eingang und a – Ausgang.

3 Zweiter Hauptsatz

3.1 Entropie

3.1.1 Allgemein

$$\underbrace{\frac{dS_{sys}}{dt}}_{=0, \text{stat.}} = \underbrace{\sum_i \dot{S}_{Q_i}}_{=0, \text{adiabat}} + \underbrace{\sum_i \dot{m}_i \cdot s_i}_{=0, \text{geschlossen}} + \underbrace{\sum_i \dot{S}_{irr}}_{=0, \text{kein Temp.grad.}}^{\geq 0} \quad (38)$$

$$\Delta S_{sys} = S_{Q_{12}} + m_{12} \cdot (s_1 - s_2) + S_{irr} \quad (39)$$

$$\dot{S}_Q = \frac{\dot{Q}}{T_{bez}} = \dot{S}_{Q_e} - \dot{S}_{Q_a} \quad (40)$$

$$dS_Q = \frac{dQ}{t_{bez}} \quad (41)$$

$$s = \frac{\dot{s}}{dt} = \frac{S}{m} \quad (42)$$

3.1.2 ideale Gase

$$\Delta S_{sys} = m \cdot \Delta s_{sys} \quad (43)$$

$$\Delta s_{sys} = s_2 - s_1 = +c_v \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) + R \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) \quad (44)$$

$$= s_1 - s_2 = - \quad - \quad (45)$$

$$\Delta s_{sys} = s_2 - s_1 = +c_p \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - R \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) \quad (46)$$

$$= s_1 - s_2 = - \quad + \quad (47)$$

$$(48)$$

Mit:

- S_Q : Wärmeentropie J/K
- \dot{S}_Q : Wärmeentropiestrom W/K
- s : spezifische Entropie J/kg K

3.2 Exergie

Welche Arbeit lässt sich maximal gewinnen, wenn das System auf den Umgebungszustand (Index ∞) gebracht wird. **Exergie** eines **geschlossenen Systems (ideales Gas)**:

$$E_x = m [u - u_\infty - T_\infty (s - s_\infty) + p_\infty (v - v_\infty)] \quad (49)$$

$$\text{mit } u - u_\infty = c_V \cdot (T - T_\infty) \quad (50)$$

$$s - s_\infty = c_p \cdot \ln \left(\frac{T}{T_\infty} \right) - R \cdot \ln \left(\frac{p}{p_\infty} \right) \quad (51)$$

$$v - v_\infty = R \left(\frac{T}{p} - \frac{T_\infty}{p_\infty} \right) \quad (52)$$

Exergieänderung bei einem **geschlossenen System** zwischen zwei Zuständen (**ideales Gas**, reversible ZÄ mit Wärmeabgabe an die Umgebung):

$$\Delta E_x = m \cdot [u_2 - u_1 - T_\infty \cdot (s_2 - s_1)] + p_\infty \cdot (V_2 - V_1) \quad (53)$$

$$= m \cdot [u_2 - u_1 - T_\infty \cdot (s_2 - s_1) + p_\infty \cdot (v_2 - v_1)] \quad (54)$$

$$\text{mit } u_2 - u_1 = c_V \cdot (T_2 - T_1) \quad (55)$$

$$s_2 - s_1 = c_p \cdot \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - R \cdot \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) \quad (56)$$

$$v_2 - v_1 = R \left(\frac{T_2}{p_2} - \frac{T_1}{p_1} \right) \quad (57)$$

Exergie eines Systems bei einem **offenen und stationär durchströmten System**:

$$\Delta e_x = e_{\text{aus}} - e_{\text{ein}} = [h_{\text{aus}} - h_{\text{ein}} - T_\infty (s_{\text{aus}} - s_{\text{ein}})] \quad (58)$$

Dabei hat die ΔE_x die Einheit J und s hat die Einheit J/kg K.

Spezifischer Exergieverlust:

$$e_x = T_\infty \cdot s_{\text{irr}} \quad (59)$$

4 Zustandsgleichung (ideale Gase)

Bei idealen Gasen ist h und u eine Funktion von T . Für die Berechnung von u wird **immer** c_V und für die Berechnung von h wird **immer** c_p verwendet! Dies ist unabhängig von der wirklichen Zustandsänderung – die Begriffe isochore und isobare (spezifische) Wärmekapazität sind lediglich historisch bedingt.

Hinsweis von Herr Heinz: Wichtig ist hier noch, dass h und u bei idealen Gasen **nur** eine Temperaturfunktion sind (also nur eine Zustandsgröße zur Berechnung notwendig), während man für die Berechnung von u und h im Allgemeinen mehr als eine Größe benötigt. Das ideale Gas ist somit ein Sonderfall.

4.1 Allgemein

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2} \quad (60)$$

$$\text{oder } \frac{p \cdot V}{T} = \text{konstant} \quad (61)$$

$$= n \cdot R_m \quad (62)$$

$$= N \cdot k \quad (63)$$

$$= m \cdot R \quad (64)$$

Mit:

- p – **Absoluter** Druck in Pascal, 1 bar = 10⁵ Pa = 10⁵ N/m² = 10⁵ J/m³
- V – Volumen
- T – Temperatur in Kelvin, 0 K = -273,15 °C
- n – Anzahl der Mole bzw. Stoffmenge
- R_m – molare Gaskonstante (8,314 J/mol K)
- N – Teilchenzahl/Anzahl der Teilchen
- k – Boltzmann-Konstante ($1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} = \frac{R_m}{N_A}$)
- m – Masse
- $R = \frac{R_m}{M}$ – individuelle (spezifische) Gaskonstante in J/kg K

- M – Molmasse, Masse von einem Mol Teilchen g/mol
- N_A – Avogadro-Zahl ($6,022 \cdot 10^{23}$ 1/mol – Teilchen pro Mol)

Umgestellt ergeben sich u. a. folgende Beziehungen:

$$p = \frac{m \cdot R \cdot T}{V} \quad (65)$$

$$V = \frac{m \cdot R \cdot T}{p} \quad (66)$$

$$T = \frac{p \cdot V}{m \cdot R} \quad (67)$$

$$m = \frac{p \cdot V}{R \cdot T} \quad (68)$$

4.2 Weitere Beziehungen

$$n = \frac{m}{M} = \frac{N}{N_A} = \frac{p \cdot V}{T \cdot R_m} \quad (69)$$

$$\varrho = \frac{m}{V} = \frac{n \cdot M}{v} = \frac{M \cdot p}{R_m \cdot T} = \frac{N \cdot m_m}{V} = \frac{p}{R \cdot T} \quad (70)$$

$$\frac{p \cdot v}{T} = R_i = R \quad (71)$$

Mit:

- ϱ – Dichte in kg/m³
- v – spezifisches Volumen in m³/kg, $v = \frac{1}{\varrho} = \frac{V}{m}$
- m_m – Masse eines Moleküls

4.3 Wärmekapazitäten-Beziehungen

$$n = \frac{c_p}{c_v} \quad (72)$$

$$c_p = c_v + R \quad (73)$$

$$c_{pm} = c_{vm} + R_m \quad (\text{m - molar}) \quad (74)$$

$$c_v = \frac{R}{\kappa - 1} \quad (75)$$

$$c_p = \frac{R \cdot \kappa}{\kappa - 1} \quad (76)$$

4.4 Normvolumen und Normdichte

Gasvolumen können nur verglichen werden, wenn sie gleiche Temperatur und gleichen Druck besitzen. Im Normzustand ($p = p_n = 101,325 \cdot 10^3 \text{ Pa} = 1,01325 \text{ bar}$ und $T = T_n = 273,15 \text{ K}$) nennt man es **Normvolumen**.

$$\frac{p \cdot V}{T} = \frac{p_n \cdot V_n}{T_n} \quad (77)$$

$$\rightarrow V_n = V \cdot \frac{T_n \cdot p}{T \cdot p_n} \quad (78)$$

$$\rightarrow \rho_n = \frac{p_n}{R \cdot T_n} \quad (\text{Normdichte}) \quad (79)$$

4.5 Gasgemische

4.5.1 Allgemein

Bei Gasgemischen ist sowohl von einer mittleren Dichte ρ_{Misch} als auch von einer mittleren (individuellen) Gaskonstanten R_{Misch} auszugehen.

Das Mischungsverhältnis kann wie folgt angegeben werden:

- Massenverhältnis ξ

$$\xi_i = \frac{m_i}{m_{\text{ges}}} = \frac{n_i \cdot M_i}{n \cdot M_{\text{ges}}} = \psi_i \cdot \frac{M_i}{M_{\text{ges}}} \quad (80)$$

$$\sum_i \xi_i = 1 \quad (81)$$

- Relative Stoffmenge γ (Molenbruch / Molanteil) – verhält sich **volumetrisch!**

$$\gamma_i = \frac{n_i}{n_{\text{ges}}} \quad (82)$$

$$\sum_i \gamma_i = 1 \quad (83)$$

- Volumenverhältnis η – verhält sich wie die relative Stoffmenge!

$$\eta_i = \frac{V_i}{V_{\text{ges}}} \quad (84)$$

$$\sum_i \eta_i = 1 \quad (85)$$

$$\sum_i V_i = V_{\text{ges}} \quad (86)$$

V_i – Volumen der Komponente **vor** der Mischung

- Partialdruckverhältnis

$$\frac{p_i}{p_{\text{ges}}} \quad (87)$$

$$p_i = \gamma_i \cdot p_{\text{ges}} \quad \sum_i p_i = p_{\text{ges}} \quad (88)$$

p_i – Druck der Komponente **nach** der Mischung

- Partialdichte ρ

$$\rho_i = \frac{m_i}{V_{\text{ges}}} = \xi_i \cdot \frac{m_{\text{ges}}}{V_{\text{ges}}} \quad (89)$$

Für ideale Gase gilt:

$$\frac{V_i}{V_{\text{ges}}} = \frac{p_i}{p_{\text{ges}}} = \frac{n_i}{n_{\text{ges}}} = \gamma_i \quad (90)$$

Die (spezifische / individuelle) Gaskonstante für die Mischung R_{Misch} lässt sich dann folgendermaßen berechnen:

$$R_{\text{Misch}} = \frac{R_m}{M_{\text{Misch}}} = \frac{\text{molare Gaskonstante}}{\text{molare Masse der Mischung}} = \frac{8,314 \text{ kJ/kmolK}}{M_{\text{Misch}}} \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right] \quad (91)$$

$$R_{\text{Misch}} = \sum_i \xi_i \cdot R_i \quad (92)$$

$$R_{\text{Misch}} = \frac{1}{\sum_i \frac{\gamma_i}{R_i}} \quad (93)$$

Dabei berechnen sich R_i und M_{Misch} (=die molare Masse der Mischung) wie folgt:

$$M_{\text{Misch}} = \frac{\sum_i m_i}{\sum_i n_i} = \sum_i \gamma_i \cdot M_i \quad \left[\frac{\text{g}}{\text{mol}} \right] \quad (94)$$

mit (ideale Gase) $\gamma_i = \frac{n_i}{n_{\text{ges}}} = \eta_i = \frac{V_i}{V_{\text{ges}}} = \frac{p_i}{p_{\text{ges}}} = \frac{\text{Prozent}}{100}$ (95)

$$R_i = \frac{R_m}{M_i} \quad (96)$$

Weiterhin gilt:

$$p \cdot V_{\text{Misch}} = m_{\text{Misch}} \cdot R_{\text{Misch}} \cdot T \quad (97)$$

$$\gamma_i = \xi_i \cdot \frac{R_i}{R_{\text{Misch}}} \quad (98)$$

$$\gamma_i = \xi_i \cdot \frac{M_{\text{Misch}}}{M_i} \quad (99)$$

$$\xi_i = \gamma_i \cdot \frac{R_{\text{Misch}}}{R_i} \quad (100)$$

$$\xi_i = \gamma_i \cdot \frac{M_i}{M_{\text{Misch}}}$$

$$R_i \cdot m_i = \frac{R_m}{M_{\text{Misch}}} \cdot \gamma_i \cdot m_{\text{ges}} \quad (101)$$

Die spezifische Innere Energie der Mischung u_{Misch} und die spezifische Enthalpie der Mischung h_{Misch} berechnen sich wie folgt:

$$u_{\text{Misch}} = \sum_i \xi_i \cdot u_i \quad (102)$$

$$h_{\text{Misch}} = \sum_i \xi_i \cdot h_i = \frac{h_m}{M_{\text{Misch}}} \quad (\text{mit } h_m - \text{ molare Enthalpie}) \quad (103)$$

Die **spezifische Wärmekapazität** bei konstanten Volumen der Mischung $c_{v\text{Misch}}$ und die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck der Mischung $c_{p\text{Misch}}$ berechnen sich wie folgt:

$$c_{v\text{Misch}} = \sum_i \xi_i \cdot c_{v_i} \quad (104)$$

$$c_{p\text{Misch}} = \sum_i \xi_i \cdot c_{p_i} \quad (105)$$

Der **Isentropenexponent** κ stellt das Verhältnis der Wärmekapazitäten c_p und c_v dar. Für die Mischung gilt dann:

$$\frac{1}{\kappa_{\text{Misch}} - 1} = \sum_i \frac{\gamma_i}{\kappa_i - 1} = a \quad (106)$$

$$\rightarrow \kappa_{\text{Misch}} = \frac{1}{a} + 1 \quad (107)$$

$$\text{oder: } \kappa_{\text{Misch}} = \frac{c_{p\text{Misch}}}{c_{v\text{Misch}}} = \frac{c_{p\text{Misch}}}{c_{p\text{Misch}} - R_{\text{Misch}}} \quad (108)$$

4.5.2 Gesetz nach Dalton und Amagat

Dalton'sches Gesetz Additive Überlagerung der Partialdrücke: Jede Komponente i verhält sich wie die Mischung. Die thermodynamische Zustandsgleichung idealer Gase gilt für jede Komponente i , wenn statt dem Druck p der Partialdruck p_i , sowie die entsprechende Stoffmenge n_i bzw. -masse m_i eingesetzt wird.

$$p = \sum_i p_i = \sum_i \frac{n_i \cdot R_m \cdot T}{V} \quad (109)$$

$$= \sum_i \frac{m_i \cdot R_i \cdot T}{V} \quad (110)$$

Amagat'sches Gesetz Die Komponenten i eines idealen Gasgemisches nehmen ein ihrer Molanteile proportionales Volumen ein, wenn diese in Teilsysteme separiert werden, in denen der Druck der Mischung herrscht.

$$V = \sum_i V_i = \sum_i \frac{n_i \cdot R_m \cdot T}{p} \quad (111)$$

$$= \sum_i \frac{m_i \cdot R_i \cdot T}{p} \quad (112)$$

4.6 Zustandsänderungen idealer Gase

Gilt zunächst für **geschlossene** Systeme!

4.6.1 Isochore ZÄ ($V = \text{konstant}$)

- Volumen $V = \text{konstant}$
- Zustandsgleichung

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad (113)$$

- Der Druck p ist proportional der Temperatur T

$$p \sim T \quad (114)$$

- Keine Volumenänderungsarbeit W_{12}

$$W_{12} = 0 \quad (115)$$

- Ausgetauschte Wärmemenge Q_{12}

$$Q_{12} = U_2 - U_1 \quad (116)$$

$$= c_V \cdot m \cdot (T_2 - T_1) \quad (117)$$

$$= C_V \cdot (T_2 - T_1) \quad (118)$$

4.6.2 Isobare ZÄ ($p = \text{konstant}$)

System nimmt Energie in Form von Wärme auf und gibt einen Teil als Volumenänderungsarbeit ab.

- Druck $p = \text{konstant}$
- Zustandsgleichung

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad (119)$$

- Volumenänderungsarbeit W_{12}

$$W_{12} = - \int_{V_1}^{V_2} p(V) dV = (V_1 - V_2) \cdot p = (v_1 - v_2) \cdot p \cdot m \quad (120)$$

- Ausgetauschte Wärmemenge Q_{12}

$$Q_{12} = U_2 - U_1 \quad (121)$$

$$= c_p \cdot m \cdot (T_2 - T_1) \quad (122)$$

$$= C_p \cdot (T_2 - T_1) \quad (123)$$

- Änderung der Inneren Energie ΔU

$$U_2 - U_1 = W_{12} + Q_{12} \quad (124)$$

4.6.3 Isotherme ZÄ ($T = \text{konstant}$)

Die zugeführte Wärme wird restlos in Arbeit umgewandelt.

- Temperatur $T = \text{konstant}$
- Zustandsgleichung

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1} \quad (125)$$

- Volumenänderungsarbeit W_{12}

$$W_{12} = - \int_{V_1}^{V_2} p(V) dV = - \int_{V_1}^{V_2} \frac{m \cdot R \cdot T}{V} dV \quad (126)$$

$$= -m \cdot R \cdot T \cdot \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = -p \cdot V_1 \cdot \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) \quad (127)$$

$$= -m \cdot R \cdot T \cdot \ln \left(\frac{p_1}{p_2} \right) \quad (128)$$

- Ausgetauschte Wärmemenge Q_{12}

$$Q_{12} = -W_{12} \quad (129)$$

- Änderung der Inneren Energie ΔU

$$U_2 - U_1 = 0 \quad (\text{da Innerer Energie bei Gasen} \sim \text{Temperatur}) \quad (130)$$

4.6.4 Isentrope ZÄ ($S = \text{konstant}$)

Reversibel (verlustfrei) adiabate Zustandsänderung, bei der kein Wärmeaustausch mit der Umgebung stattfindet.

Schlüsselwörter: verlustfrei (und schnell), reibungsfrei (und schnell), ohne Wärmeübergang

- Entropie $S = \text{konstant}$
- Zustandsgleichung für **Temperatur** und **Volumen**

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\kappa-1} \quad (131)$$

$$\text{oder } T_1 \cdot V_1^{\kappa-1} = T_2 \cdot V_2^{\kappa-1} = \text{konstant} \quad (132)$$

Umgestellt nach den einzelnen Variablen T_i und V_i :

$$T_1 = T_2 \cdot \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa-1} \qquad T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1} \qquad (133)$$

$$V_1 = V_2 \cdot \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \qquad V_2 = V_1 \cdot \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \qquad (134)$$

Der Isentropenexponent κ berechnet sich folgendermaßen:

$$\kappa = \frac{\ln\left(\frac{T_1 \cdot V_2}{T_2 \cdot V_1}\right)}{\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)} = \frac{\ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right)}{\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)} + 1 \qquad (135)$$

• Zustandsgleichung für **Temperatur** und **Druck**

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \qquad (136)$$

$$\text{oder } T_1^\kappa \cdot p_1^{1-\kappa} = T_2^\kappa \cdot p_2^{1-\kappa} = \text{konstant} \qquad (137)$$

Anwendung bei **Ausströmen aus Behälter (Motoren)**: Kolben am OT und das Auslassventil öffnet - isentrope Entspannung der Gasmasse.

Modellvorstellung: Man betrachtet nur den Teil des Gasvolumens, das nach der Entspannung des gesamten Zylinderraum einnimmt (freie Wahl der Systemgrenze). Die Entspannung sei isentrop. Da sich der Druck abbaut und sich dadurch die Temperatur ändert, ist auch die Enthalpie nicht konstant – daher geht es darüber nicht so einfach ($U_2 - U_1 = -m \cdot h$ und $dh = c_p \cdot dT$).

Umgestellt nach den einzelnen Variablen T_i und p_i :

$$T_1 = T_2 \cdot \frac{p_1}{p_2} \cdot \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\kappa}} = T_2 \cdot \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} \qquad T_2 = T_1 \cdot \frac{p_2}{p_1} \cdot \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\kappa}} = T_1 \cdot \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} \qquad (138)$$

$$p_1 = p_2 \cdot \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \qquad p_2 = p_1 \cdot \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \qquad (139)$$

Der Isentropenexponent κ berechnet sich folgendermaßen:

$$\kappa = \frac{\ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)}{\ln\left(\frac{p_1 \cdot T_2}{p_2 \cdot T_1}\right)} = \left[1 - \frac{\ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right)}{\ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)} \right]^{-1} \quad (140)$$

- Zustandsgleichung für **Volumen** und **Druck**

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\kappa \quad (141)$$

$$\text{oder } p_1 \cdot V_1^\kappa = p_2 \cdot V_2^\kappa = \text{konstant} \quad (142)$$

Umgestellt nach den einzelnen Variablen V_i und p_i :

$$p_1 = p_2 \cdot \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\kappa \quad p_2 = p_1 \cdot \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\kappa \quad (143)$$

$$V_1 = V_2 \cdot \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\kappa}} \quad V_2 = V_1 \cdot \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\kappa}} \quad (144)$$

Der Isentropenexponent κ berechnet sich folgendermaßen:

$$\kappa = \frac{\ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)}{\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)} \quad (145)$$

- Volumenänderungsarbeit W_{12}

$$W_{12} = -\frac{m \cdot p_1 \cdot v_1}{\kappa - 1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right] \quad (146)$$

$$= -\frac{m \cdot R \cdot T_1}{\kappa - 1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right] \quad (147)$$

$$= -\frac{p_1 \cdot V_1}{\kappa - 1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right] \quad (148)$$

$$= -\frac{m \cdot p_1 \cdot v_1}{\kappa - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa-1} \right] \quad (149)$$

$$= -\frac{m \cdot R \cdot T_1}{\kappa - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa-1} \right] \quad (150)$$

$$= -\frac{p_1 \cdot V_1}{\kappa - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa-1} \right] \quad (151)$$

$$= \frac{n \cdot R_m}{\kappa - 1} \cdot (T_2 - T_1) \quad (n \text{ ist hier die Anzahl der Mole}) \quad (152)$$

$$= \frac{m \cdot R}{\kappa - 1} \cdot (T_2 - T_1) \quad (153)$$

mit $p \cdot V = m \cdot R \cdot T$:
$$= \frac{p_2 \cdot V_2 - p_1 \cdot V_1}{\kappa - 1} \quad (154)$$

$$= m \cdot c_V \cdot (T_2 - T_1) \quad (155)$$

Der Ausdruck $\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa-1}$ kann bei Motoren durch das Verdichtungsverhältnis ϵ ausgedrückt werden:

$$\text{Verdichten: } \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa-1} = \epsilon^{\kappa-1} \quad (156)$$

$$\text{Entspannen: } \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa-1} = \frac{1}{\epsilon^{\kappa-1}} \quad (157)$$

- Technische Arbeit $W_{t_{12}}$ (wichtig für z. B. Turbinen)

$$W_{t_{12}} = \kappa \cdot W_{12} \quad (158)$$

- Ausgetauschte Wärmemenge Q_{12}

$$Q_{12} = 0 \tag{159}$$

- Änderung der Inneren Energie ΔU

$$U_2 - U_1 = W_{12} \tag{160}$$

4.6.5 Polytrope ZÄ

Eine Zustandsänderung des idealen Gases verlaufen isotherm, wenn $\Delta T = 0$, also ein ungehinderter Wärmeaustausch mit der Umgebung möglich ist.

Bei einer isentropen Zustandsänderung darf keinerlei Wärme mit der Umgebung ausgetauscht werden: $Q = 0$. Zwischen diesen beiden nicht realisierbaren Prozessen als Sonderfälle verlaufen die polytropen Zustandsänderungen, bei dem ein Teil der Wärme mit der Umgebung ausgetauscht wird.

Die **Kurve** dieser Zustandsänderung (**Polytrope**) verläuft im p - V -Diagramm zwischen der Isotherme und der Isentrope, d. h., sie ist **steiler als die Isotherme**, aber **nicht so steil** wie die **Isentrope**.

Das Gesetz der polytropen Zustandsänderung:

$$p \cdot V^n = \text{konstant} \tag{161}$$

$$\text{mit } 1 < n < \kappa \tag{162}$$

Der **Polytropenexponent** n ist kein Materialwert – er wird bestimmt durch die **technischen Randbedingungen**.

- $n = 1$ isotherme Zustandsänderung
- $n = \kappa$ isentrope Zustandsänderung
- $n = \infty$ isochore Zustandsänderung
- $n = 0$ isobare Zustandsänderung

Wichtiger Hinweis: Es gelten die gleichen Zustandsgleichungen wie für die isentrope Zustandsänderung (siehe Seite 19 ff.) – man ersetzt lediglich κ durch n .

- Volumenänderungsarbeit W_{12}

$$W_{12} = \frac{m \cdot R}{n - 1} \cdot (T_2 - T_1) \quad (163)$$

$$= \frac{m \cdot c_V \cdot (\kappa - 1)}{n - 1} \cdot (T_2 - T_1) \quad (164)$$

$$= \frac{p_2 \cdot V_2 - p_1 \cdot V_1}{n - 1} \quad (165)$$

- Wärme Q_{12}

$$Q_{12} = \frac{m \cdot c_V \cdot (n - \kappa)}{n - 1} \cdot (T_2 - T_1) \quad (166)$$

- Und wie immer gilt:

$$c_V = \frac{R}{\kappa - 1} \quad (167)$$

- Zustandsgleichung für **Temperatur** und **Volumen**

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{n-1} \quad (168)$$

$$\text{oder } T_1 \cdot V_1^{n-1} = T_2 \cdot V_2^{n-1} = \text{konstant} \quad (169)$$

Umgestellt nach den einzelnen Variablen T_i und V_i :

$$T_1 = T_2 \cdot \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{n-1} \quad T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{n-1} \quad (170)$$

$$V_1 = V_2 \cdot \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{n-1}} \quad V_2 = V_1 \cdot \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{1}{n-1}} \quad (171)$$

Der Polytropenexponent n berechnet sich folgendermaßen:

$$n = \frac{\ln \left(\frac{T_1 \cdot V_2}{T_2 \cdot V_1} \right)}{\ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)} = \frac{\ln \left(\frac{T_1}{T_2} \right)}{\ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)} + 1 \quad (172)$$

• Zustandsgleichung für **Temperatur** und **Druck**

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{n-1}{n}} \quad (173)$$

$$\text{oder } T_1^n \cdot p_1^{1-n} = T_2^n \cdot p_2^{1-n} = \text{konstant} \quad (174)$$

Anwendung bei **Ausströmen aus Behälter (Motoren)**: Kolben am OT und das Auslassventil öffnet - isentrope Entspannung der Gasmasse.

Modellvorstellung: Man betrachtet nur den Teil des Gasvolumens, das nach der Entspannung des gesamten Zylinderraum einnimmt (freie Wahl der Systemgrenze). Die Entspannung sei isentrop. Da sich der Druck abbaut und sich dadurch die Temperatur ändert, ist auch die Enthalpie nicht konstant – daher geht es darüber nicht so einfach ($U_2 - U_1 = -m \cdot h$ und $dh = c_p \cdot dT$).

Umgestellt nach den einzelnen Variablen T_i und p_i :

$$T_1 = T_2 \cdot \frac{p_1}{p_2} \cdot \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{n}} = T_2 \cdot \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1-n}{n}} \quad T_2 = T_1 \cdot \frac{p_2}{p_1} \cdot \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1}{n}} = T_1 \cdot \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1-n}{n}} \quad (175)$$

$$p_1 = p_2 \cdot \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{n}{n-1}} \quad p_2 = p_1 \cdot \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{n}{n-1}} \quad (176)$$

Der Polytropenexponent n berechnet sich folgendermaßen:

$$n = \frac{\ln \left(\frac{p_1}{p_2} \right)}{\ln \left(\frac{p_1 \cdot T_2}{p_2 \cdot T_1} \right)} = \left[1 - \frac{\ln \left(\frac{T_1}{T_2} \right)}{\ln \left(\frac{p_1}{p_2} \right)} \right]^{-1} \quad (177)$$

• Zustandsgleichung für **Volumen** und **Druck**

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^n \quad (178)$$

$$\text{oder } p_1 \cdot V_1^n = p_2 \cdot V_2^n = \text{konstant} \quad (179)$$

Umgestellt nach den einzelnen Variablen V_i und p_i :

$$p_1 = p_2 \cdot \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^n \qquad p_2 = p_1 \cdot \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^n \qquad (180)$$

$$V_1 = V_2 \cdot \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{n}} \qquad V_2 = V_1 \cdot \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{n}} \qquad (181)$$

Der Polytropenexponent n berechnet sich folgendermaßen:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)}{\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)} \qquad (182)$$

- Um den Polytropenexponent zu ermitteln hilft manchmal folgende Beziehung:

$$\frac{W_{12}}{Q_{12}} = \frac{w_{12}}{q_{12}} = \frac{\frac{m \cdot c_V \cdot (\kappa - 1)}{n - 1} \cdot (T_2 - T_1)}{\frac{m \cdot c_V \cdot (n - \kappa)}{n - 1} \cdot (T_2 - T_1)} = \frac{\kappa - 1}{n - \kappa} \qquad (183)$$

$$\frac{q_{12}}{w_{12}} = \frac{n - \kappa}{\kappa - 1} \qquad (184)$$

$$\rightarrow n = \kappa \cdot \left(\frac{q_{12}}{w_{12}} + 1\right) - \frac{q_{12}}{w_{12}} \qquad (185)$$

$$= \frac{q_{12}}{w_{12}} \cdot (\kappa - 1) + \kappa \qquad (186)$$

$$= \frac{\kappa \cdot \left(\frac{w_{12}}{q_{12}} + 1\right) - 1}{\frac{w_{12}}{q_{12}}} \qquad (187)$$

- Änderung der Inneren Energie ΔU

$$U_2 - U_1 = W_{12} + Q_{12} \qquad (188)$$

- Polytroper Wirkungsgrad $\eta_{\text{pol,k}}$ **Kompression / Verdichter**

$$\eta_{\text{pol,k}} = \frac{w_d}{w_t} = \frac{\text{Druckänderungsarbeit}}{\text{technische Arbeit}} = \frac{1}{1 + \frac{w_r}{w_d}} \qquad (189)$$

• Polytroper Wirkungsgrad $\eta_{\text{pol,e}}$ **Expansion / Turbine**

$$\eta_{\text{pol,e}} = \frac{w_t}{w_d} = \frac{\text{technische Arbeit}}{\text{Druckänderungsarbeit}} = 1 + \frac{w_r}{w_d} \quad (190)$$

Hier am Beispiel eines **adiabaten** Verdichters/Kompressors:

$$w_t = h_2 - h_1 = c_p \cdot (T_2 - T_1) = \frac{\kappa \cdot R}{\kappa - 1} \cdot (T_2 - T_1) \quad (191)$$

$$w_d = \frac{n \cdot R}{n - 1} (T_2 - T_1) \quad (192)$$

$$\rightarrow \eta_{\text{pol}} = \frac{w_t}{w_d} = \frac{n \cdot (\kappa - 1)}{\kappa \cdot (n - 1)} \quad (193)$$

5 Zustandsgleichung (ideale Gase) – FoSa des Lehrstuhls

5.1 Arbeiten

- w spez. technische Arbeit:
meistens das w im 1. HS (z.B. Wellenarbeit)
- w_s spez. Verschiebearbeit:

$$\text{Eintrittsstutzen: } w_{s,e} = p_e \cdot v_e \quad \left[\frac{\text{J}}{\text{kg}} \right] \quad (194)$$

$$\text{Austrittsstutzen: } w_{s,a} = -p_a \cdot v_a \quad (195)$$

- w_d spez. Druckänderungsarbeit:

$$w_d = \int_e^a v dp \rightarrow w_d = v(p_a - p_e) \quad \text{Nur wenn } v = \text{konst.}! \quad (196)$$

- W_n Nutzarbeit:
Nutzarbeit ist die um den mit der Umgebung ausgetauschte Anteil verminderte Volumenänderungsarbeit W_v

$$W_n = W_{V,\text{Gas}} - W_{V,\infty} = (V_1 - V_2)p - (V_1 - V_2)p_\infty \quad (197)$$

- Dissipationsarbeit:
Arbeit die unumkehrbar in innere Energie umgewandelt wird (z.B. Reibungsarbeit w_r)

Aufpassen: $-w$ für abgegebene Arbeit, $+w$ für aufgenommene Arbeit!

5.1.1 geschlossenes System (ohne Δe)

$$w_v = - \int_1^2 p dv = \frac{R}{n-1} \cdot (T_2 - T_1) \quad (198)$$

$$w_i = w_v + w_r = \frac{R}{n-1} \cdot (T_2 - T_1) + w_r \quad (199)$$

$$q + w_r = u_2 - u_1 - w_v \quad (200)$$

$$= c_v \cdot (T_2 - T_1) - \frac{R}{n-1} \cdot (T_2 - T_1) \quad (201)$$

$$= \frac{R}{\kappa - 1} \cdot (T_2 - T_1) - \frac{R}{n-1} \cdot (T_2 - T_1) \quad (202)$$

$$= \frac{n - \kappa}{(\kappa - 1)(n - 1)} \cdot R \cdot (T_2 - T_1) \quad (203)$$

$$= \frac{c_v \cdot (n - \kappa)}{n - 1} \cdot (T_2 - T_1) \quad (204)$$

Allgemeinfall:

- **irreversibel und diabat**

$$w_r \neq 0 \quad (205)$$

$$q \neq 0 \quad (206)$$

Reibarbeit und Wärmeaustausch mit der Umgebung sind vorhanden.

Sonderfälle:

- **reversibel und diabat**

$$w_r = 0 \quad (207)$$

$$q \neq 0 \quad (208)$$

$$w_v = - \int_1^2 p dv = \frac{R}{n-1} \cdot (T_2 - T_1) \quad (209)$$

$$w_i = w_v = \frac{R}{n-1} \cdot (T_2 - T_1) \quad (210)$$

$$q = u_2 - u_1 - w_v \quad (211)$$

$$= c_v \cdot (T_2 - T_1) - \frac{R}{n-1} \cdot (T_2 - T_1) \quad (212)$$

$$= \frac{R}{\kappa-1} \cdot (T_2 - T_1) - \frac{R}{n-1} \cdot (T_2 - T_1) \quad (213)$$

$$= \frac{n-\kappa}{(\kappa-1)(n-1)} \cdot R \cdot (T_2 - T_1) \quad (214)$$

$$= \frac{c_v \cdot (n-\kappa)}{n-1} \cdot (T_2 - T_1) \quad (215)$$

$$\frac{q}{w_v} = \frac{\kappa-1}{n-\kappa} \quad (216)$$

Reibungsfrei aber mit Wärmeaustausch mit der Umgebung.

• **irreversibel und adiabat**

$$w_r \neq 0 \quad (217)$$

$$q = 0 \quad (218)$$

Kein Wärmeaustausch mit der Umgebung aber reibungsbehaftet.

$$w_v = - \int_1^2 p dv = \frac{R}{n-1} \cdot (T_2 - T_1) \quad (219)$$

$$w_i = w_v + w_r = \frac{R}{n-1} \cdot (T_2 - T_1) + w_r \quad (220)$$

$$w_r = u_2 - u_1 - w_v \quad (221)$$

$$= c_v \cdot (T_2 - T_1) - \frac{R}{n-1} \cdot (T_2 - T_1) \quad (222)$$

$$= \frac{R}{\kappa-1} \cdot (T_2 - T_1) - \frac{R}{n-1} \cdot (T_2 - T_1) \quad (223)$$

$$= \frac{n-\kappa}{(\kappa-1)(n-1)} \cdot R \cdot (T_2 - T_1) \quad (224)$$

$$= \frac{c_v \cdot (n-\kappa)}{n-1} \cdot (T_2 - T_1) \quad (225)$$

5.1.2 offenes System (mit $\Delta e = \Delta e_{\text{pot}} + \Delta e_{\text{kin}}$)

- Index 1 – Eingang
- Index 2 – Ausgang

$$w_d = \int_1^2 v dp = \frac{n \cdot R}{n-1} \cdot (T_2 - T_1) \quad (226)$$

$$w_t = w_d + w_r + \Delta e \quad (227)$$

$$= \frac{n \cdot R}{n-1} \cdot (T_2 - T_1) + w_r + \Delta e \quad (228)$$

$$q + w_r = h_2 - h_1 - w_d \quad (229)$$

$$= c_p \cdot (T_2 - T_1) - \frac{n \cdot R}{n-1} \cdot (T_2 - T_1) \quad (230)$$

$$= \frac{\kappa \cdot R}{\kappa - 1} \cdot (T_2 - T_1) - \frac{n \cdot R}{n-1} \cdot (T_2 - T_1) \quad (231)$$

$$= \frac{n - \kappa}{(\kappa - 1)(n - 1)} \cdot R \cdot (T_2 - T_1) \quad (232)$$

$$= \frac{c_v \cdot (n - \kappa)}{n - 1} \cdot (T_2 - T_1) \quad (233)$$

Allgemeinfall:

- **irreversibel** und **diabat**

$$w_r \neq 0 \quad (234)$$

$$q \neq 0 \quad (235)$$

Reibarbeit und Wärmeaustausch mit der Umgebung sind vorhanden.

Sonderfälle:

- **reversibel** und **diabat**

$$w_r = 0 \quad (236)$$

$$q \neq 0 \quad (237)$$

Reibungsfrei aber mit Wärmeaustausch mit der Umgebung.

$$w_d = \int_1^2 v dp = \frac{n \cdot R}{n-1} \cdot (T_2 - T_1) \quad (238)$$

$$w_t = w_d + \Delta e \quad (239)$$

$$= \frac{\kappa \cdot R}{\kappa - 1} \cdot (T_2 - T_1) + \Delta e \quad (240)$$

$$q = h_2 - h_1 - w_d \quad (241)$$

$$= c_p \cdot (T_2 - T_1) - \frac{n \cdot R}{n-1} \cdot (T_2 - T_1) \quad (242)$$

$$= \frac{\kappa \cdot R}{\kappa - 1} \cdot (T_2 - T_1) - \frac{n \cdot R}{n-1} \cdot (T_2 - T_1) \quad (243)$$

$$= \frac{n - \kappa}{(\kappa - 1)(n - 1)} \cdot R \cdot (T_2 - T_1) \quad (244)$$

$$= \frac{c_v \cdot (n - \kappa)}{n - 1} \cdot (T_2 - T_1) \quad (245)$$

• **irreversibel und adiabat**

$$w_r \neq 0 \quad (246)$$

$$q = 0 \quad (247)$$

Kein Wärmeaustausch mit der Umgebung aber reibungsbehaftet.

$$w_d = \int_1^2 v dp = \frac{n \cdot R}{n-1} \cdot (T_2 - T_1) \quad (248)$$

$$w_t = w_d + w_r + \Delta e \quad (249)$$

$$= \frac{n \cdot R}{n-1} \cdot (T_2 - T_1) + w_r + \Delta e \quad (250)$$

$$w_r = h_2 - h_1 - w_d \quad (251)$$

$$= c_p \cdot (T_2 - T_1) - \frac{n \cdot R}{n-1} \cdot (T_2 - T_1) \quad (252)$$

$$= \frac{\kappa \cdot R}{\kappa - 1} \cdot (T_2 - T_1) - \frac{n \cdot R}{n-1} \cdot (T_2 - T_1) \quad (253)$$

$$= \frac{n - \kappa}{(\kappa - 1)(n - 1)} \cdot R \cdot (T_2 - T_1) \quad (254)$$

$$= \frac{c_v \cdot (n - \kappa)}{n - 1} \cdot (T_2 - T_1) \quad (255)$$

6 Reale Fluide (2-Phasen-Zeugs)

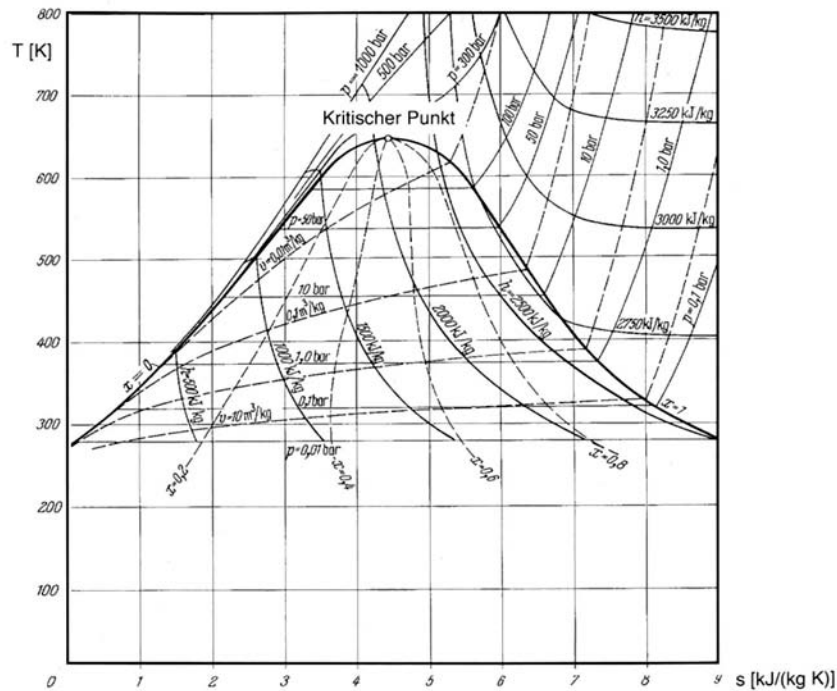


Abbildung 2: T - s -Diagramm aus Skript (mit isobaren, isenthalpen und isochoren (Wasser))

Hinweis: Folgende Abbildungen stammen aus dem *Skriptum zur Vorlesung Thermodynamik I* (Version 6.9.2007) des *Lehrstuhls für Thermodynamik* an der *Technischen Universität München*:

- Abbildung 2
- Abbildung 5
- Abbildung 8

$$c_v = \frac{R}{\kappa - 1} \quad c_{v\text{Luft}} = 717,5 \text{ J/kgK}$$

$$h = c_p \cdot T$$

$$c_{p\text{Luft}} = 1004,5 \text{ J/kgK} \quad c_p = \frac{R \cdot \kappa}{\kappa - 1}$$

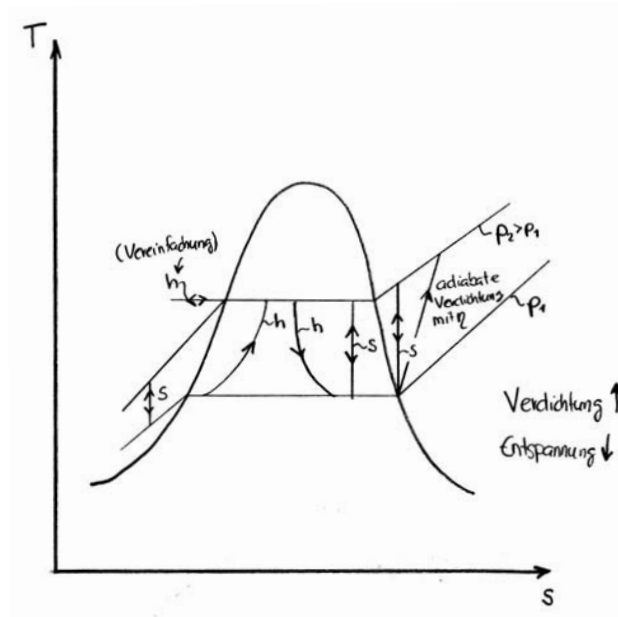


Abbildung 3: Eigene Darstellung

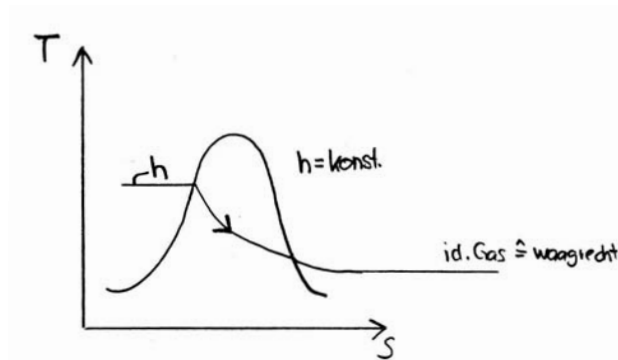


Abbildung 4: Eigene Darstellung

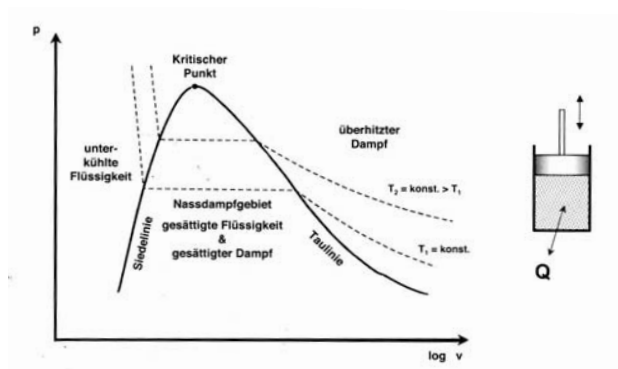


Abbildung 5: p-v-Diagramm

$$c_v = \frac{R}{\kappa - 1} \quad c_{v\text{Luft}} = 717,5 \text{ J/kgK}$$

$$34 \quad h = c_p \cdot T$$

$$c_{p\text{Luft}} = 1004,5 \text{ J/kgK} \quad c_p = \frac{R \cdot \kappa}{\kappa - 1}$$

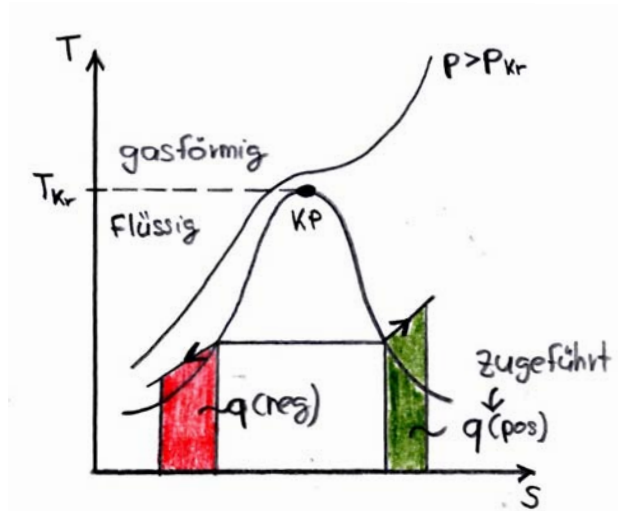


Abbildung 6: Kritischer Punkt und Wärmemengen im T-s-Diagramm

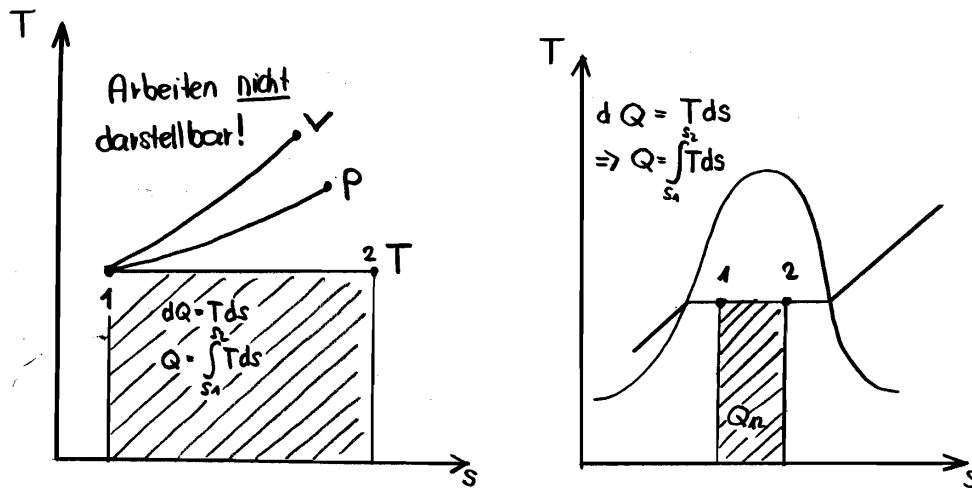


Abbildung 7

Nassdampf Nassdampf besteht aus **gesättigter Flüssigkeit** und **gesättigtem Dampf** bei gleichem Druck und gleicher Temperatur (Gleichgewicht) – also aus zwei Phasen.

Unterkühlte Flüssigkeit Nicht siedende Flüssigkeit (links von der Glockenkurve).

Überhitzter Dampf Überhitzer Dampf ist Dampf mit einer Temperatur oberhalb der Siedetemperatur.

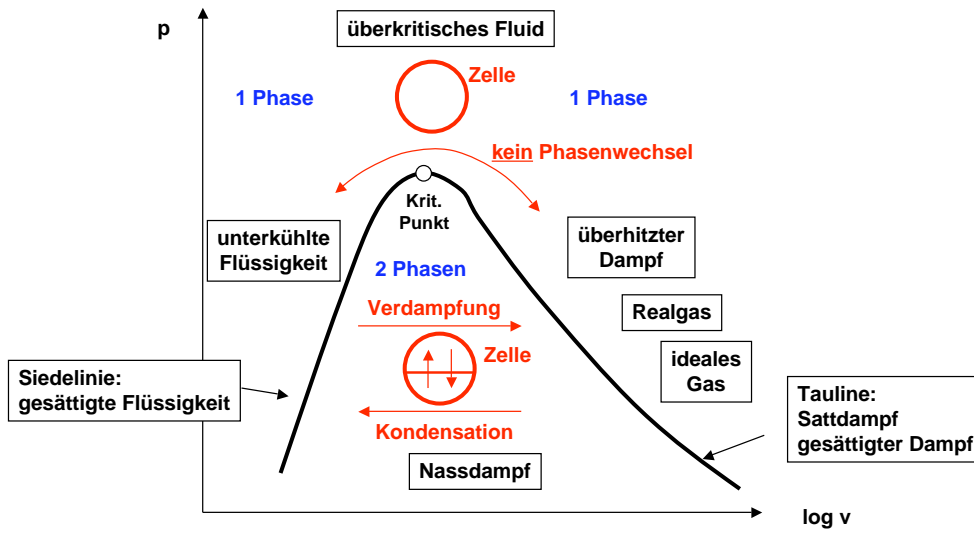


Abbildung 8: Wichtige Begriffe

$$c_v = \frac{R}{\kappa - 1} \quad c_{v\text{Luft}} = 717,5 \text{ J/kgK}$$

$$h = c_p \cdot T$$

$$c_{p\text{Luft}} = 1004,5 \text{ J/kgK} \quad c_p = \frac{R \cdot \kappa}{\kappa - 1}$$

Wichtige Beziehungen im Zwei-Phasengebiet:

- Dampfgehalt x

$$x = \frac{m_D}{m_{\text{ges}}} \quad (256)$$

$$= \frac{m_D}{m_D + m_{\text{Fl}}} \quad (257)$$

Index D steht für Dampf und Index Fl für Flüssigkeit.

- Gesamtmasse berechnet sich zu

$$m_{\text{ges}} = m_D + m_{\text{Fl}} \quad (258)$$

- Die Nässe berechnet sich zu $(1 - x)$

$$m_{\text{Fl}} = (1 - x) \cdot m_{\text{ges}} \quad (259)$$

- Dampf:

$$m_D = x \cdot m_{\text{ges}} \quad (260)$$

- Massenbilanz:

$$\Delta m = m_1 - m_2 = \dot{m} \cdot t_{12} \quad (261)$$

Aus dem Hebelgesetz folgt:

$$v(x) = (1 - x) \cdot v' + x \cdot v'' = v' + x \cdot (v'' - v') = \frac{\varrho''(\varrho' - \varrho)}{\varrho(\varrho' - \varrho'')} \quad (262)$$

$$u(x) = (1 - x) \cdot u' + x \cdot u'' = u' + x \cdot (u'' - u') \quad (263)$$

$$h(x) = (1 - x) \cdot h' + x \cdot h'' = h' + x \cdot (h'' - h') \quad (264)$$

$$s(x) = (1 - x) \cdot s' + x \cdot s'' = s' + x \cdot (s'' - s') \quad (265)$$

Oder nach dem Dampfgehalt x aufgelöst:

$$x = \frac{v - v'}{v'' - v'} \quad \text{mit} \quad v = \frac{V}{m} = \frac{1}{\rho} \quad (266)$$

$$x = \frac{u - u'}{u'' - u'} \quad (267)$$

$$x = \frac{h - h'}{h'' - h'} \quad (268)$$

$$x = \frac{s - s'}{s'' - s'} \quad (269)$$

Wenn in der **Dampf**tafel die spezifische **innere Energie nicht tabelliert** ist, dann kann sie über folgende Beziehung berechnet werden:

$$u = h - p \cdot v \quad (270)$$

6.1 Berechnung der Masse in einem Behälter

Im Nassdampfgebiet liegen zwei Phasen vor – gesättigte Flüssigkeit (') und gesättigter Dampf (").

$$m_{ges} = V_{ges} \cdot \left(\frac{a}{v'} + \frac{b}{v''} \right) \quad (271)$$

- a – Anteil des Flüssigkeitsvolumens am Gesamtvolumen V
- b – Anteil des Dampfsvolumens am Gesamtvolumen V
- $\rightarrow a + b = 1$

Für die Massenanteile $m_{\text{Dampf}} = m_{\text{D}}$ und $m_{\text{Flüssigkeit}} = m_{\text{F}}$ ergibt sich demnach:

$$m_{\text{F}} = \frac{V_{ges} \cdot a}{v'} = \frac{V_{\text{Fluid}}}{v'} \quad (272)$$

$$m_{\text{D}} = \frac{V_{ges} \cdot b}{v''} = \frac{V_{\text{Dampf}}}{v''} \quad (273)$$

$$\rightarrow m_{\text{D}} + m_{\text{F}} = m_{ges} \quad (274)$$

6.2 Erwärmen bei konstantem Volumen und konstanter Masse

Zu beachten ist, dass das spezifische Volumen $v = \frac{V}{m} = v_1 = v_2$ dabei konstant bleibt - der Dampfgehalt x ändert sich. Aus der Dampftafel müssen dann für den jeweiligen Zustand die entsprechenden Werte abgelesen werden.

$$U_2 - U_1 = Q_{12} = m \cdot (u_2 - u_1) = \dot{Q}_{12} \cdot \Delta t_{12} \quad (275)$$

$$\text{mit } U_1 = m \cdot [u' + x_1 \cdot (u'' - u')]_{\text{Zustand 1}} \quad (276)$$

$$= m \cdot \left[u' + \frac{v - v'}{v'' - v'} \cdot (u'' - u') \right]_{\text{Zustand 1}} \quad (277)$$

$$U_2 = m \cdot [u' + x_2 \cdot (u'' - u')]_{\text{Zustand 2}} \quad (278)$$

$$= m \cdot \left[u' + \frac{v - v'}{v'' - v'} \cdot (u'' - u') \right]_{\text{Zustand 2}} \quad (279)$$

$$(280)$$

6.3 Wenn etwas *strömt* (Rohrleitung, Behälter) – allgemein: nicht nur bei 2-Phasen-Zeugs

Wenn etwas strömt (einströmt, ausströmt, durchströmt), dann wird mit der Enthalpie (h bzw. H) gerechnet. Bei ruhenden Systemen ($dE_{\text{sys,kin}} = dE_{\text{sys,pot}} = 0$) folgt aus dem ersten Hauptsatz:

$$\dot{E}_{\text{sys}} = \sum \dot{Q} + \sum \dot{W} + \sum \dot{m} \left(h + g \cdot z + \frac{c^2}{2} \right) = \dot{U}_{\text{sys}} \quad (281)$$

Integriert über die Zeit ergibt sich:

$$U_{\text{sys},2} - U_{\text{sys},1} = \sum \dot{W} \cdot \Delta t + \sum \dot{Q} \cdot \Delta t + \sum \dot{m} \cdot \Delta t \cdot \left(h + g \cdot z + \frac{c^2}{2} \right) \quad (282)$$

Ist das System **stationär** durchströmt, so ist $\dot{E}_{\text{sys}} = 0$. Wenn es nicht stationär ist, dann wird z. B. folgende Beziehung benötigt:

$$m_{\text{danach}} = m_{\text{davor}} \pm \Delta m = m_{\text{davor}} \pm \dot{m} \cdot \Delta t \quad (283)$$

Bei **idealen Gasen** kann folgendes Ansatz nützlich sein:

Man hat im Zustand 1 eine bestimmte Menge m_a vom Gas a im Behälter (konstantes Volumen V). Dann strömt eine bestimmte Menge m_b von Gas b bis zum Druckausgleich (Druck $p_{2\text{ges}}$) ein. Die Endtemperatur sei T_2 . Gesucht sei die eingeströmte Masse m_b – nun kann man mit Partialdrücken rechnen:

$$p_{2\text{ges}} = p_{a2} + p_{b2} \quad (284)$$

$$\rightarrow p_{b2} = p_{2\text{ges}} - p_{a2} \quad (285)$$

$$\text{mit } p_{a2} = \frac{m_a \cdot R_a \cdot T_2}{V} \quad (286)$$

$$\rightarrow m_b = \frac{p_{b2} \cdot V}{R_b \cdot T_2} \quad (287)$$

6.4 Überhitzter Dampf expandiert in einem (adiabaten!) Kolben – Nutzarbeit

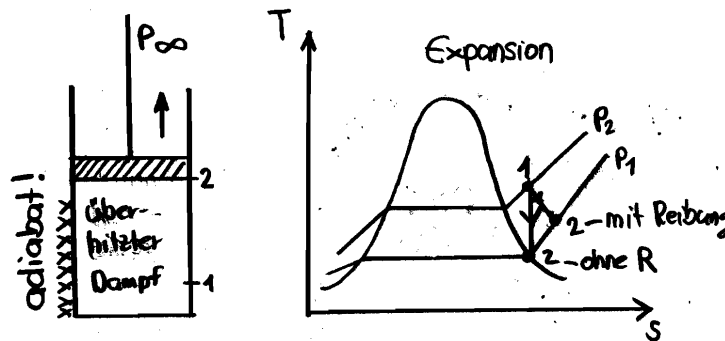


Abbildung 9: Grafik zur Expansion von realem Gas in einem Kolben

$$U_2 - U_1 = W_V + \underbrace{Q}_{=0} \quad (288)$$

$$w_{\text{Nutz}} = w_V + w_\infty \quad (289)$$

$$= -(u_2 - u_1) + p_\infty \cdot (V_2 - V_1) \quad (290)$$

$$= \underbrace{(u_1 - u_2)}_{\text{neg.}} + \underbrace{p_\infty \cdot (V_2 - V_1)}_{\text{pos.}} \quad (291)$$

Mit

- w_{Nutz} – Nutzarbeit (ist hier negativ – wird abgegeben)
- w_V – Volumenänderungsarbeit
- w_∞ – Arbeit an der Umgebung

6.5 Interpolation

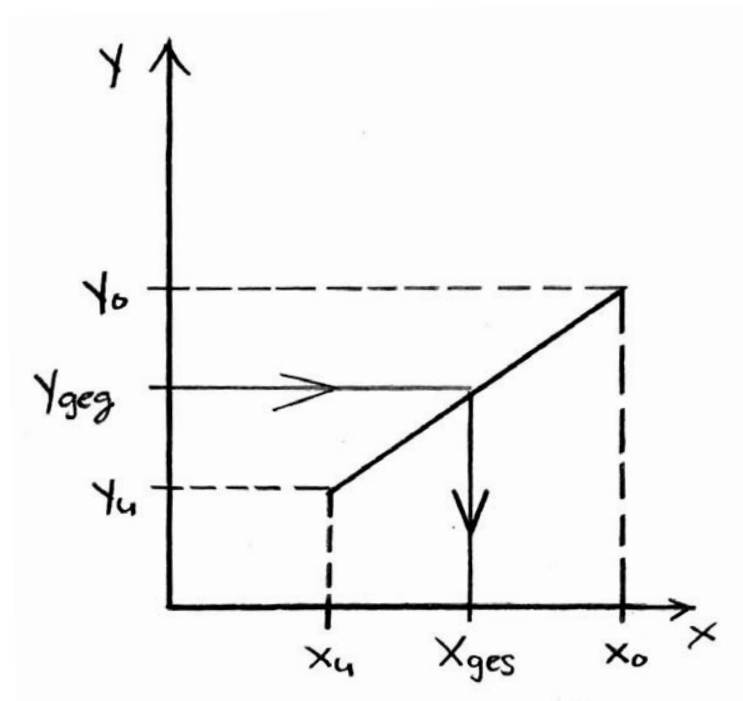


Abbildung 10: Veranschaulichung der linearen Interpolation.

$$x_{\text{gesucht}} = x_{\text{ges}} = x_u + (x_o - x_u) \cdot \left(\frac{y_{\text{geg}} - y_u}{y_o - y_u} \right) \quad (292)$$

7 Kreisprozesse

7.1 Otto-Motor

Man unterscheidet zwischen dem idealisierten (Standard-Prozess) und dem realen Prozess. Beim idealisierten Prozess ist die Gasmenge konstant. Die Kraftstoff-Masse wird bei beiden Versionen vernachlässigt.

7.1.1 Standard-Prozess

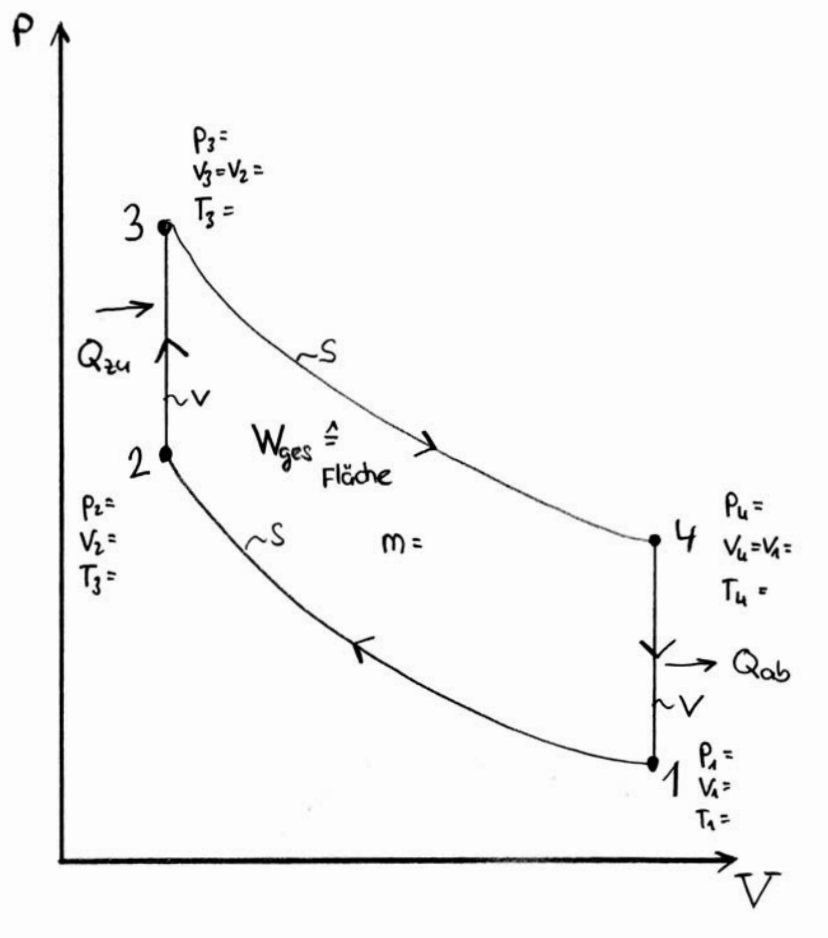


Abbildung 11: p - V -Diagramm des idealisierten Otto-Prozesses (ohne Ventilspiel)

$$c_v = \frac{R}{\kappa - 1} \quad c_{v\text{Luft}} = 717,5 \text{ J/kgK}$$

$$h = c_p \cdot T$$

$$c_{p\text{Luft}} = 1004,5 \text{ J/kgK} \quad c_p = \frac{R \cdot \kappa}{\kappa - 1}$$

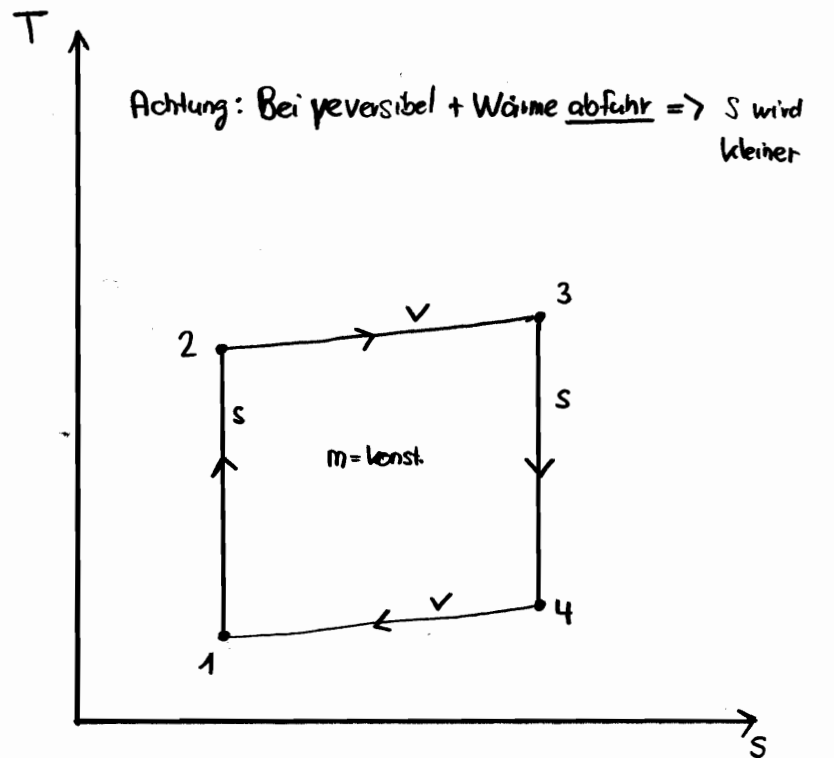


Abbildung 12: T - s -Diagramm des idealisierten Otto-Prozesses (ohne Ventilspiel)

1→2 Isentrope Verdichtung von V_1 nach V_2 ($V_1 > V_2$) – hier wird Arbeit am System verrichtet ($W_{12} > 0$)

2→3 Isochore Wärmezufuhr

3→4 Isentrope Entspannung – hier wird Arbeit abgegeben ($W_{34} < 0$)

4→1 Isochore Wärmeabfuhr

Gasmasse Die Gasmasse m bleibt konstant!

Nachfolgend die Beziehungen für den **Standard-Otto-Prozess**:

- Verdichtungsverhältnis ϵ (diese Beziehungen gelten immer)

$$\epsilon = \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_{UT}}{V_{OT}} = \frac{V_{OT} + V_{Hub}}{V_{OT}} \quad (293)$$

$$\rightarrow V_1 = \frac{V_{Hub} \cdot \epsilon}{\epsilon - 1} \quad (294)$$

$$\rightarrow V_2 = \frac{V_{Hub}}{\epsilon - 1} \quad (295)$$

Für den Standard-Otto-Prozess gilt weiterhin:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_3}{p_4} = \epsilon^\kappa \quad (296)$$

$$\rightarrow \epsilon = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\kappa}} = \left(\frac{p_3}{p_4}\right)^{\frac{1}{\kappa}} \quad (297)$$

$$\rightarrow \epsilon = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^\kappa = \left(\frac{p_4}{p_3}\right)^\kappa \quad (298)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_4} = \left(\frac{V_4}{V_3}\right)^{\kappa-1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1} = \epsilon^{\kappa-1} \quad (299)$$

- Technische Arbeiten

$$w_{12} = c_V \cdot (T_2 - T_1) \rightarrow W_{12} = m \cdot c_V \cdot (T_2 - T_1) \quad (300)$$

$$w_{23} = 0 \quad (301)$$

$$w_{34} = c_V \cdot (T_4 - T_3) \rightarrow W_{34} = m \cdot c_V \cdot (T_4 - T_3) \quad (302)$$

$$w_{41} = 0 \quad (303)$$

Die Nutzarbeit (theoretische oder gesamte Arbeit), die der Motor (Standard-Prozess!) leistet berechnet sich demnach wie folgt:

$$w_{14} = c_V \cdot (T_2 - T_1 + T_4 - T_3) \quad (304)$$

$$\rightarrow W_{14} = m \cdot c_V \cdot (T_2 - T_1 + T_4 - T_3) \quad (305)$$

Unter Anwendung des Formeln für die Volumenänderungsarbeit für isentrope ZÄ (mehr siehe Seite 22) ergibt sich u. a. (Achtung v und V unterscheiden!):

$$w_{14} = \frac{p_1 \cdot v_1}{\kappa - 1} \cdot \left[\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1} - 1 \right] + \frac{p_3 \cdot v_3}{\kappa - 1} \cdot \left[\left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\kappa-1} - 1 \right] \quad (306)$$

- Wärme

$$q_{12} = 0 \quad (307)$$

$$q_{23} = c_V \cdot (T_3 - T_2) \rightarrow Q_{23} = m \cdot c_V \cdot (T_3 - T_2) \quad (308)$$

$$q_{34} = 0 \quad (309)$$

$$q_{41} = c_V \cdot (T_1 - T_4) \rightarrow Q_{14} = m \cdot c_V \cdot (T_1 - T_4) \quad (310)$$

- Wirkungsgrad

$$\eta_{\text{theoretisch}} = \eta_{\text{th}} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \quad (311)$$

$$= 1 - \frac{1}{\epsilon^{\kappa-1}} \quad (312)$$

$$= \frac{-w_{13}}{q_{23}} \quad (313)$$

$$= \frac{|W_{\text{Nutz}}|}{Q_{\text{zu}}} \quad (314)$$

Der **effektive Wirkungsgrad** η_{eff} ergibt sich zu:

$$\eta_{\text{eff}} = \eta_{\text{th}} \cdot \eta_{\text{m}} \cdot \eta_{\text{g}} \quad (315)$$

Mit:

- η_{m} – mechanischer Wirkungsgrad (Getriebe etc.)
- η_{g} – Gütegrad/Leistung des Prozesses/indizierte Leistung (z. B. Brennraumgeometrie)

- Motorleistung

$$P_{\text{eff}} = n \cdot m \cdot w_{\text{eff}} \quad (316)$$

$$= n \cdot m \cdot \eta_{\text{m}} \cdot \eta_{\text{g}} \cdot w_{\text{th}} \quad (317)$$

$$= M_{\text{eff}} \cdot \omega \quad (318)$$

Mit:

- n Motordrehzahl in 1/s (**Viertaktmotor** – **halbe Drehzahl** einsetzen)
- m – Gasmasse
- M_{eff} – effektives Motordrehmoment

7→1 Isobares Ansaugen von Frischluft

Nun widmen wir uns dem **realen Prozess** (mit Ventilspiel bzw. Ladungswechselschleife):

4→5 Isochor, aber die Gasmasse ist nicht konstant – daher gelten nicht die Gleichungen für die isochore ZÄ. Oft kann es als isentrope ZÄ betrachtet werden:

$$\frac{T_5}{T_4} = \left(\frac{p_5}{p_4} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \quad (319)$$

6→7 Isentrope Entspannung des Gasmasse $m_6 = m_7$

$$\frac{T_7}{T_6} = \left(\frac{p_7}{p_6} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \quad (320)$$

Die Ladungswechselschleife (LW) vermindert den **Wirkungsgrad** des Motors:

$$\eta_{\text{th}} = \frac{|\overbrace{W_{15}}^{<0} + \overbrace{W_{LW}}^{>0}|}{Q_{\text{zu}}} \quad (321)$$

Mit:

$$W_{LW} = W_{56} + W_{67} + W_{71} \quad (322)$$

$$\rightarrow W_{56} = p_5 \cdot (V_5 - V_6) > 0 \text{ entspricht } \textit{Kraft mal Weg} \quad (323)$$

$$\rightarrow W_{67} = m_6 \cdot c_V \cdot (T_7 - T_6) < 0 \text{ (isentrope Expansion)} \quad (324)$$

$$\rightarrow W_{71} = p_7 \cdot (V_7 - V_1) < 0 \quad (325)$$

7.2 Verdichter/Kompressoren und Turbinen

7.2.1 Turbinen

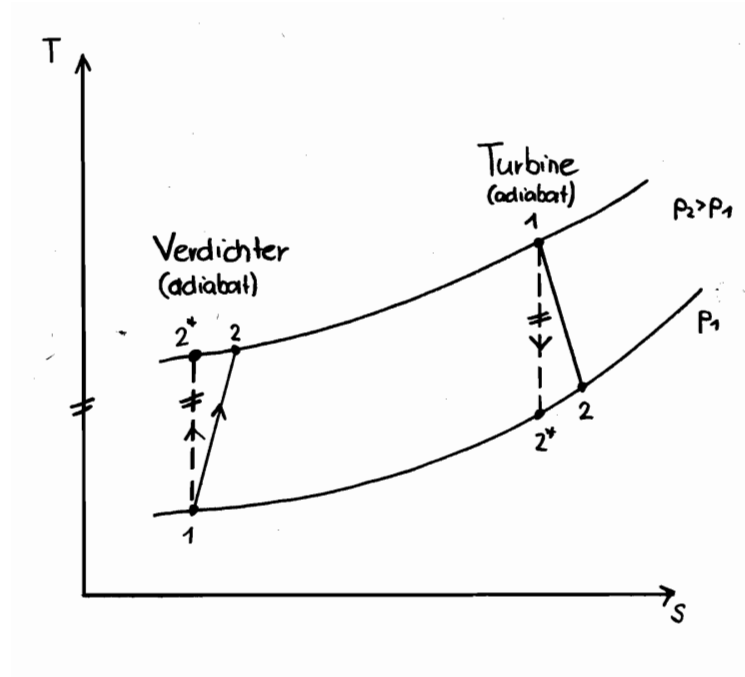


Abbildung 14: Turbine und Verdichter im T - s -Diagramm

- Turbinenarbeit W_T

$$W_T = m \cdot (h_2 - h_1) \quad (326)$$

$$= \underbrace{m \cdot c_p \cdot (T_2 - T_1)}_{\text{ideales Gas}} \quad (327)$$

$$(328)$$

- Turbinenleistung P_T

$$P_T = \dot{m} \cdot (h_2 - h_1) \quad (329)$$

$$= \underbrace{\dot{m} \cdot c_p \cdot (T_2 - T_1)}_{\text{ideales Gas}} \quad (330)$$

$$(331)$$

- isentroper Wirkungsgrad $\eta_{\text{is,T}}$

$$\eta_{\text{is,T}} = \frac{P_{\text{real}}}{P_{\text{ideal}}} = \frac{P_{\text{T}}}{P_{\text{T}^*}} \quad (332)$$

$$= \frac{h_2 - h_1}{h_{2^*} - h_1} = \underbrace{\frac{T_2 - T_1}{T_{2^*} - T_1}}_{\text{ideales Gas}} \quad (333)$$

Umgestellt ergeben sich folgende Beziehungen:

$$h_{2^*} = h_1 + \frac{h_2 - h_1}{\eta_{\text{is,T}}} \quad (334)$$

$$= h_{2'} + x_{2^*} \cdot (h_{2''} - h_{2'}) \quad \text{mit} \quad x_{2^*} = \frac{s_{2^*} - s_{2'}}{s_{2''} - s_{2'}} \quad (335)$$

$$h_2 = h_1 + \eta_{\text{is,T}} \cdot (h_{2^*} - h_1) \quad (336)$$

$$h_1 = \frac{h_{2^*} \cdot \eta_{\text{is,T}} - h_2}{\eta_{\text{is,T}} - 1} \quad (337)$$

h_{2^*} erhält man oft über Interpolation, da $s_{2^*} = s_1$:

$$x_{\text{gesucht}} = x_{\text{ges}} = x_{\text{u}} + (x_{\text{o}} - x_{\text{u}}) \cdot \left(\frac{y_{\text{geg}} - y_{\text{u}}}{y_{\text{o}} - y_{\text{u}}} \right) \quad (338)$$

$$h_{2^*} = h_{\text{u}} + (h_{\text{o}} - h_{\text{u}}) \cdot \left(\frac{s_1 - s_{\text{u}}}{s_{\text{o}} - s_{\text{u}}} \right) \quad (339)$$

- In der Regel ist die Temperatur T_{2^*} bzw. T_2 unbekannt und kann wie folgt berechnet werden (isentropes ZÄ!):

$$\frac{T_{2^*}}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \quad (340)$$

$$\rightarrow T_{2^*} = T_1 \cdot \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \quad (341)$$

- Somit lässt sich sagen:

$$\eta_{\text{is,T}} = \frac{T_2 - T_1}{T_1 \cdot \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - T_1} \quad (342)$$

$$\rightarrow T_2 = T_1 + \eta_{\text{is,T}} \cdot (T_{2*} - T_1) \quad (343)$$

$$= T_1 \cdot \left[\eta_{\text{is,T}} \cdot \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - \eta_{\text{is,T}} + 1 \right] \quad (344)$$

$$\rightarrow T_1 = \frac{T_2}{\eta_{\text{is,T}} \cdot \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - \eta_{\text{is,T}} + 1} \quad (345)$$

$$\rightarrow T_{2*} = \frac{T_2 - T_1}{\eta_{\text{is,T}}} + T_1 \quad (346)$$

$$P_T = \dot{m} \cdot c_p \cdot (T_2 - T_1) \quad (347)$$

$$= \dot{m} \cdot c_p \cdot \eta_{\text{is,T}} \cdot T_1 \cdot \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right] \quad (348)$$

$$\rightarrow T_1 = \frac{P_T}{\dot{m} \cdot c_p} + T_2 \quad \mathbf{P_T > 0!} \quad (349)$$

$$\rightarrow T_2 = -\frac{P_T}{\dot{m} \cdot c_p} + T_1 \quad \mathbf{P_T > 0!} \quad (350)$$

7.2.2 Kompressoren/Verdichter

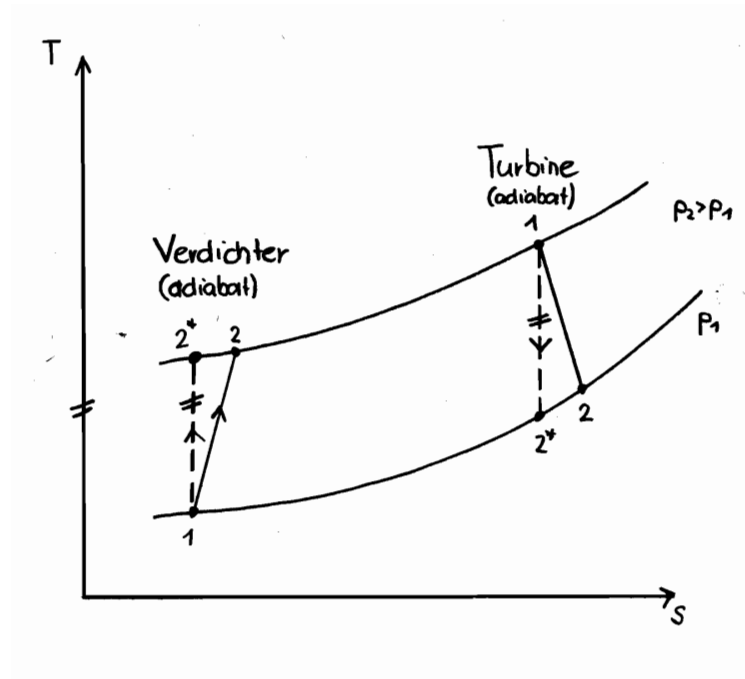


Abbildung 15: Turbine und Verdichter im T - s -Diagramm

- Verdichterarbeit W_V

$$W_V = m \cdot (h_2 - h_1) \quad (351)$$

$$= m \cdot \underbrace{c_p \cdot (T_2 - T_1)}_{\text{ideales Gas}} \quad (352)$$

$$(353)$$

- Verdichterleistung P_V

$$P_V = \dot{m} \cdot (h_2 - h_1) \quad (354)$$

$$= \dot{m} \cdot \underbrace{c_p \cdot (T_2 - T_1)}_{\text{ideales Gas}} \quad (355)$$

- Elektrische Antriebsleistung P_{el}

$$P_{el} = \frac{\dot{m} \cdot w_t}{\eta_{\text{mech}} \cdot \eta_{\text{el}}} \quad (356)$$

$$= \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot \frac{w_t}{\eta_{\text{mech}} \cdot \eta_{\text{el}}} \quad (357)$$

$$\text{adiabat} \rightarrow w_t = h_2 - h_1 = c_p \cdot (T_2 - T_1) \quad (358)$$

- isentroper Wirkungsgrad $\eta_{\text{is,V}}$ (**Achtung:** Gerade anders wie bei der Turbine!)

$$\eta_{\text{is,V}} = \frac{P_{\text{ideal}}}{P_{\text{real}}} = \frac{P_{V^*}}{P_V} \quad (359)$$

$$= \frac{h_{2^*} - h_1}{h_2 - h_1} = \underbrace{\frac{T_{2^*} - T_1}{T_2 - T_1}}_{\text{ideales Gas}} \quad (360)$$

Umgestellt ergeben sich folgende Beziehungen:

$$h_2 = h_1 + \frac{h_{2^*} - h_1}{\eta_{\text{is,V}}} \quad (361)$$

$$h_{2^*} = h_1 + \eta_{\text{is,V}} \cdot (h_2 - h_1) \quad (362)$$

$$= h_{2'} + x_{2^*} \cdot (h_{2''} - h_{2'}) \quad \text{mit} \quad x_{2^*} = \frac{s_{2^*} - s_{2'}}{s_{2''} - s_{2'}} \quad (363)$$

$$h_1 = \frac{h_2 \cdot \eta_{\text{is,V}} - h_{2^*}}{\eta_{\text{is,V}} - 1} \quad (364)$$

h_{2^*} erhält man oft über Interpolation, da $s_{2^*} = s_1$:

$$x_{\text{gesucht}} = x_{\text{ges}} = x_u + (x_o - x_u) \cdot \left(\frac{y_{\text{geg}} - y_u}{y_o - y_u} \right) \quad (365)$$

$$h_{2^*} = h_u + (h_o - h_u) \cdot \left(\frac{s_1 - s_u}{s_o - s_u} \right) \quad (366)$$

- In der Regel ist die **Temperatur** T_{2^*} bzw. T_2 **unbekannt** und kann wie folgt berechnet werden (isentrope ZÄ!):

$$\frac{T_{2^*}}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \quad (367)$$

$$\rightarrow T_{2^*} = T_1 \cdot \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \quad (368)$$

- Somit lässt sich sagen:

$$\eta_{\text{is,V}} = \frac{T_1 \cdot \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - T_1}{T_2 - T_1} \quad (369)$$

$$\rightarrow T_2 = T_1 + \frac{T_2^* - T_1}{\eta_{\text{is,V}}} \quad (370)$$

$$= \frac{T_1 \cdot \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} + \eta_{\text{is,V}} - 1 \right]}{\eta_{\text{is,V}}} \quad (371)$$

$$\rightarrow T_1 = \frac{T_2 \cdot \eta_{\text{is,V}}}{\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} + \eta_{\text{is,V}} - 1} \quad (372)$$

$$\rightarrow T_2^* = \eta_{\text{is,V}} \cdot (T_2 - T_1) + T_1 \quad (373)$$

$$P_T = \dot{m} \cdot c_p \cdot (T_2 - T_1) \quad (374)$$

$$= \frac{\dot{m} \cdot c_p \cdot T_1}{\eta_{\text{is,V}}} \cdot \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right] \quad (375)$$

$$\rightarrow T_1 = -\frac{P_T}{\dot{m} \cdot c_p} + T_2 \quad \mathbf{P_T > 0!} \quad (376)$$

$$\rightarrow T_2 = \frac{P_T}{\dot{m} \cdot c_p} + T_1 \quad \mathbf{P_T > 0!} \quad (377)$$

- Wenn die beiden Temperaturen T_1 und T_2 , der Wirkungsgrad $\eta_{\text{is,V}}$ und der Druck p_1 bekannt sind, dann geht man wie folgt vor (**gesucht** ist p_2):

$$\eta_{\text{is,V}} = \underbrace{\frac{T_2^* - T_1}{T_2 - T_1}}_{\text{ideales Gas}} \quad \rightarrow T_2^* = \eta_{\text{is,V}} \cdot (T_2 - T_1) + T_1 \quad (378)$$

$$\text{mit } p_2 = p_2^* = p_1 \cdot \left(\frac{T_2^*}{T_1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad \rightarrow p_2 = p_1 \cdot \left[\frac{\overbrace{\eta_{\text{is,V}} \cdot (T_2 - T_1) + T_1}^{T_2^*}}{T_1} \right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad (379)$$

7.3 Gasturbine

- Leistungsberechnung für Turbine und Verdichter siehe 7.2 ab Seite 48
- Generatorleistung P_G bzw. P_{el}

$$|P_T| = \left| \frac{P_V}{\eta_{VT}} \right| + \left| \frac{P_{el}}{\eta_{TG}} \right| \quad (380)$$

$$\rightarrow |P_{el}| = |P_T \cdot \eta_{TG}| - \left| P_V \cdot \frac{\eta_{TG}}{\eta_{VT}} \right| \quad (381)$$

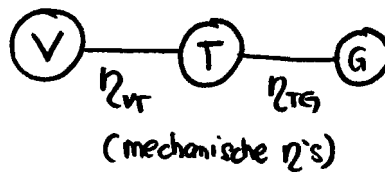


Abbildung 16: Veranschaulichung der o. g. Beziehungen.

- Brennkammerwärmestrom \dot{Q}_{BK} (zugeführte Wärme – entspricht Aufwand)

$$\dot{Q}_{BK} = \dot{m} \cdot c_p \cdot (T_2 - T_1) \quad (382)$$

Dabei sind T_1 und T_2 die Temperaturen vor bzw. nach der Wärmezufuhr – logisch!

- (Gesamt-)Wirkungsgrad der Gasturbine η_{ges}

$$\eta_{ges} = \frac{\text{Nutzen}}{\text{Aufwand}} = \frac{|P_{el}|}{\dot{Q}_{BK}} \quad (383)$$

- Manchmal werden (isobare) **Wärmetauscher** (WT) verwendet, um den Wirkungsgrad zu erhöhen. Dabei wird das verdichtete Fischgas durch das Abgas vorgewärmt, bevor es in die Brennkammer kommt. Die **elektrische Leistung bleibt gleich** – nur der Aufwand wird geringer. Wirkungsgrad des WT:

$$\eta_{WT} = \frac{P_{real}}{P_{ideal}} \quad (384)$$

$$= \frac{T_2 - T_1}{T_{2^*} - T_1} \quad (385)$$

$$= \frac{T_b - T_a}{T_{b^*} - T_a} \quad (386)$$

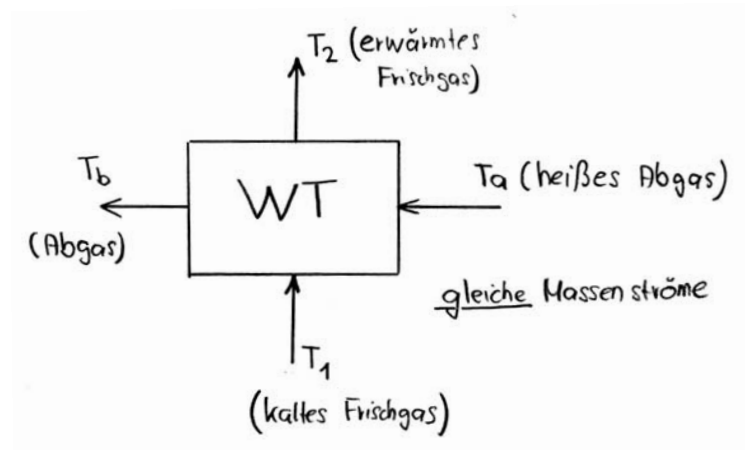


Abbildung 17: Wärmetauscher

Dabei ist die maximal erreichbare Frischgas-Temperatur T_{2^*} gleich der Temperatur des heißen Abgases T_a . Die minimale Abgastemperatur T_{b^*} ist gleich der Temperatur des kalten Frischgases T_1 :

$$\eta_{\text{WT}} = \frac{P_{\text{real}}}{P_{\text{ideal}}} \quad (387)$$

$$= \frac{T_2 - T_1}{T_a - T_1} \quad (388)$$

$$= \frac{T_b - T_a}{T_1 - T_a} \quad (389)$$

- Kälteziffer Kältemaschine:

$$\epsilon_K = \frac{\dot{Q}_{\text{abgeführt}}}{P_{\text{zugeführt}}} \quad (390)$$

- Wärmeziffer Wärmepumpe:

$$\epsilon_{\text{WP}} = \frac{\dot{Q}_{\text{abgeführt}} + \dot{Q}_{\text{zugeführt}}}{P_{\text{zugeführt}}} \quad (391)$$